非线性科学丛书

分岔与奇异性

陆启韶 编著



上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

内 容 提 要

本书是"非线性科学丛书"的一种，阐述非线性系统分岔的基本概念、主要方法和一些重要应用，并讨论奇异性理论在静态分岔中的应用；附录中还简要介绍了微分动力系统，作为研究分岔的数学基础。全书深入浅出，注意系统性，并有大量图例，以利读者迅速进入分岔理论及应用课题的研究。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由朱照宣、李邦河审阅。

非线性科学丛书

分岔与奇异性

陆启韶 编著

朱照宣 李邦河 审阅

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路393号）

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 151,000

1995年9月第1版 1995年9月第1次印刷

印数 1—8200 本

ISBN 7-5428-1091-X/O·58 定价：(精装本)10.[illegible]元

Advanced Series in Nonlinear Science

Bifurcation and Singularity

Lu Qi-shao

Department of Applied Mathematics and Physics
Beijing University of Aeronautics and Astronautics
Beijing 100083, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1995

非线性科学丛书编辑委员会

非线性科学丛书

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法."数、理、化、天、地、生"这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域. 这种发展的一个重要特征，可以概括为"非"字当头，即出现了以"非"字起首而命名的一系列新方向和新领域. 其中，非线性科学占有极其重要的位置. 这决非人们"想入非非"，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升.

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题. 每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧. 诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型. 不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的"手工艺"珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系.

20 世纪 60 年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化. 一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质. 这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓"反散射"方法. 反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内禀的对称和保守性质. 到了 80 年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系.

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理．于是，非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来，成为一个广泛的研究领域．虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统，但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的．

另一方面，在“不可积”的极端，对KAM定理条件的“反面文章”，揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性，而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例．这些研究迅速地融成一片，一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识．原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统，其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感，同投掷骰子一样地随机和不可预测．然而，混沌不是无序，它可能包含着丰富的内部结构．

同时，由于计算科学特别是图形技术的长足进步，人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象．从随机与结构共存的湍流图象，到自然界中各种图样花纹的选择与生长，以及生物形态的发生过程，都开始展现出其内在的规律．如果说，混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为，则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程．标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用．

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中，许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散，同时也提出了新的深刻的数学问题．物理学中关于对称和守恒，对称破缺，相变和重正化群的思想，也在日益增多的新领域中找到应用．“非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语，非线性科学正在成为跨学科的研究前沿．各门传统学科中都有自己的非线性篇章，非线性科学却不是这些篇章的总和．非线性科学揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法．

这样迅猛发展的跨学科领域，很难设想用少数专著加以概括，

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步．于是，有了动员在前沿工作的教学和研究人员，以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法．在上海科技教育出版社的大力支持下，这一计划得以付诸实现．

这套“非线性科学丛书”不是高级科普，也不是大块专著．它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展，帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域，同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材．非线性科学的全貌将由整套丛书刻划，每册努力讲清一个主题，一个侧面，而不求面面俱到，以免失之过泛．在写作风格上，作者们将努力深入浅出，图文并茂，文献丰富；力求有实质内容，无空洞议论，以真刀真枪脚踏实地武装读者．从读者方面，自然要求具备理工科大学本科的数学基础，和读书时自己主动思索与推导的习惯．

“非线性科学丛书”的成功，取决于读者和作者的支持．我们衷心欢迎批评和建议．

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前　言

分岔是非线性科学的一个重要分支．它的近代发展有着深刻的数学和应用背景，并且与非线性科学的其他分支密切相关．现在，分岔研究已不只局限在数理科学的范围内，而且在其他自然科学、社会科学和工程技术领域中发挥着日益显著的作用．本书以深入浅出的形式，并通过大量图例，较系统地介绍分岔的基本概念、主要方法和一些重要应用，以使读者通过本书能初步窥视分岔的全貌，在较短的时间里了解和掌握分岔的基本内容，为以后深入研究分岔理论打下良好的基础．

本书的第 1 章通过在数学和应用方面的许多例子，初步阐述了分岔的基本概念，并为下面各章做好必要的准备．第 2 章介绍了研究分岔的一些主要方法．第 3 章较详细地讨论了奇异性和对称性理论及其在静态分岔问题中的应用．第 4 章着重研究动态分岔问题，特别是霍普夫分岔、普适开折和模态相互作用等．阅读本书时，读者应具备理工科大学本科的数理知识．至于研究分岔中需用到的一些现代数学知识，本书在适当的章节中将简要作些介绍．附录中专门介绍微分动力系统的基本概念，供对这些内容不够熟悉的读者参考．

在本书的编写过程中，作者通过有关的论著、讨论和交流，受到国内外许多非线性科学家的教益．郝柏林教授、郑伟谋教授关心和支持本书的出版；朱照宣教授、李邦河教授认真审阅原稿并提出宝贵意见，在此谨向他们表示深切的谢意．对于书中疏漏不足之处，恳望广大读者给予批评指正．

陆启韶

1994 年 5 月于北京航空航天大学

Abstract

Basic concepts and main theoretical methods of bifurcation in nonlinear systems are systematically introduced along with the applications in science and technology. The fundamental knowledge of differential dynamical systems is attached as an appendix. This book is intended for students, researchers and engineers who are interested in and devoted to nonlinear science.



目　录

Contents

第 1 章

分岔概述

§1 引 言

对于含参数的系统，当参数变动并经过某些临界值时，系统的定性性态（例如平衡状态或周期运动的数目和稳定性等）会发生突然变化．这种变化称为分岔（bifurcation）．分岔是一类常见的重要非线性现象，并与其他非线性现象（如混沌、突变、分形、拟序结构等）密切相关．因此，在非线性科学中分岔研究占有重要地位．

分岔问题起源于研究一些力学失稳现象．早在 18 世纪中叶，伯努利（Daniel Bernoulli）和欧拉（L. Euler）等人就已研究过杆件在纵向压力作用下的屈曲问题．1834 年，雅可比（C. G. J. Jacobi）在研究自引力介质的椭球形旋转液体星的平衡图形时，首先引进"abzweigung"（德文"分岔"）这个术语．1885 年，庞卡莱（H. J. Poincaré）提出旋转液体星平衡图形的演化过程的分岔理论．1883 年，雷诺（O. Reynolds）发现在临界雷诺数时层流转变为湍流的现象，从此开创了流动稳定性的研究．固体力学的屈曲和流体力学的转捩一直是推动分岔研究的重要动力．本世纪 30 年代，范德波（B. Van der Pol），安德罗诺夫（A. A. Андронов）等在非线性振动研究中即已发现大量分岔现象．然而，在相当长时间里，研究分岔主要是在应用领域中进行的．直到本世纪 60 年代，微分动力系统、突变、奇异性、非线性分析等方面逐渐形成了现代数学理论，电子计算机和有效计算手段相继出现，尤其是不同领域中混沌现象的发现，促使分岔理论迅速发展，并且在力学、物理学、化学、生物学、生态学、医学、控制、工程技术以至社会科学中得到

了广泛应用.

在介绍分岔的基本概念之前,我们先看两个简单的例子.

[例1] 考虑方程 $\mu x - x^3 = 0$ 的解随参数 μ 变化的情况,其中 $x, \mu \in \mathbb{R}$.

当 $\mu \leqslant 0$ 时,此方程有唯一解 $x = 0$;当 $\mu > 0$ 时,此方程有三个解:$x = 0$ 和 $x = \pm\sqrt{\mu}$. 图1-1表明了方程的解随参数 μ 变化的情况. 解的数目在 $\mu = 0$ 处发生突然变化,因此方程出现分岔(通常称为"叉形分岔").

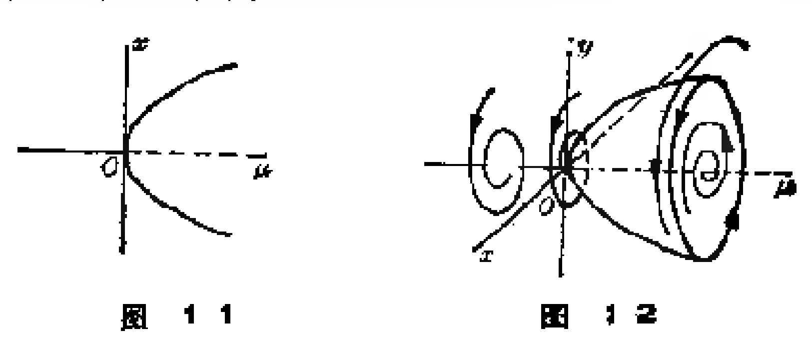


图 1-1　　　　图 1-2

[例2] 考虑微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

的解随参数 $\mu \in \mathbb{R}$ 变化的情况.

在极坐标系中,此方程组可写成

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

利用初等积分法,不难得到

$$r = \begin{cases} \sqrt{\mu(1 + Ce^{-2\mu t})^{-1}}, & \text{当 } \mu \neq 0 \text{ 时;} \\ \sqrt{(2t + C)^{-1}}, & \text{当 } \mu = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\theta = t - t_0.$$

其中 C 和 t_0 由初始条件决定. 图1-2表示当参数 μ 取不同数值时此方程组在 x-y 相平面上轨线分布情况(即相图). 可以看到,$(0, 0)$ 始终是唯一的平衡点. 对 $\mu < 0$,相平面上的轨线当 $t \to +\infty$ 时都盘旋地趋于原点,即 $(0, 0)$ 是渐近稳定的焦点;当 $\mu > 0$

时，轨线当 $t\to+\infty$ 时盘旋地趋于闭轨 $r=\sqrt{\mu}$，即(0, 0)变成不稳定的焦点，与此同时出现一个稳定的极限环(即渐近稳定的孤立闭轨) $r=\sqrt{\mu}$. 显然，方程组(1.1)的解的定性行为(即相图的拓扑结构)在 $\mu=0$ 处发生突然变化，因此出现分岔(通常称为"霍普夫分岔").

从上面的例子可以初步看到，在各种静态和动态问题中，存在不同形式的分岔现象. 本章将简要介绍分岔的一些基本概念、常见类型和重要应用例子，为以后各章的深入研究打下基础.

§2 分岔的基本概念

为了便于理解，本节主要介绍有限维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的含参数动力系统分岔的一些基础概念. 这里包括由 C^r(其中 $r\geqslant1$)向量场 $f: U\times J\to\mathbb{R}^n$ 给出的连续动力系统

$$\dot{x}=f(x,\ \mu),\qquad x\in U\subset\mathbb{R}^n,\ \ \mu\in J\subset\mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

其中 U、J 是开集，x 是状态变量，μ 是分岔参数(亦称"控制变量")，以及由 C^r(其中 $r\geqslant1$)同胚

$$g:\ U\times J\to\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto g(x,\ \mu)$$

$$x\in U\subseteq\mathbb{R}^n,\quad \mu\in J\subseteq\mathbb{R}^m \quad (2.2)$$

给出的离散动力系统 $\{g^k\}_{k\in Z}$. 这里介绍的分岔概念，可推广到有限维或无限维微分流形上的动力系统. 更详细的数学表述，请参看本书附录的第 161 页.

当参数 μ 连续地变动且通过 $\mu_0\in J$ 时，如果系统(2.1)或(2.2)失去结构稳定性，即系统的定性性态(即拓扑结构)发生突然变化，则称该系统在 μ_0 处出现**分岔**. μ_0 称为**分岔值**. 全体分岔值组成的集合称为该系统在参数空间中的**分岔集**. 为了清楚地描述由分岔所引起系统的定性性态变化的情况，我们可在 $(x,\ \mu)$ 空间中画出该系统的极限集(如平衡点(不动点)、闭轨(周期轨线)、不变环面等)随参数 μ 变化的图形. 这种图形称为**分岔图**. 它反

映了动力系统的定性性态随参数变化的情况.

一般说,完整的分岔分析需要了解动力系统的全局拓扑结构.这是十分复杂,甚至是难以做到的. 实际应用中,有时只需考虑在某个平衡点(不动点)附近动力系统拓扑结构的变化,即只研究在它们的邻域内局部向量场(或微分同胚)的分岔. 这类分岔问题称为**局部分岔**. 如果分岔分析涉及向量场的大范围拓扑结构,则称为**全局分岔**. 当然,向量场的"局部"和"非局部"性质是密切相关的,局部分岔本身也是全局分岔分析的重要内容.

下面以单参数动力系统为例,介绍一些典型的分岔问题. 我们分向量场和映射两种情形进行讨论,并设参数 μ 是标量,即

$$\mu\in\mathbb{R}.$$

§2.1 向量场的分岔

1. 平衡点分岔

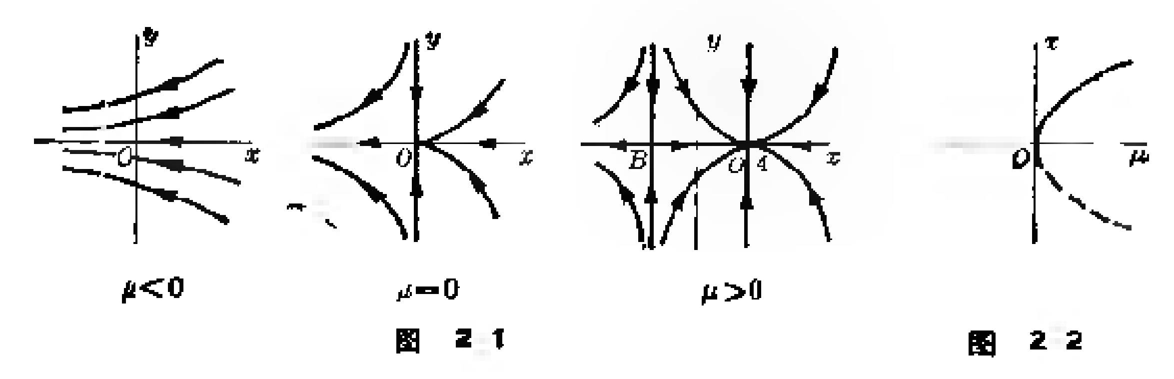
设当 $\mu=\mu_0$ 时系统(2.1)有非双曲平衡点 x_0,即 $f(x_0, \mu_0)=0$,且对 x 的导算子 $D_xf(x_0, \mu_0)$有实部为0的特征值,则向量场 $f(x, \mu)$当 $\mu=\mu_0$ 时是结构不稳定的,μ_0 是一个分岔值. 这时,对向量场 $f(x, \mu_0)$作适当的小扰动,可以使点 x_0 附近的轨线拓扑结构发生变化,例如平衡点的产生(或消失)、时变状态(如周期轨线、同宿或异宿轨线等)的出现. 这种分岔称为**平衡点分岔**,它属于局部分岔的范畴.

首先考虑非双曲平衡点的一种最简单情形. 此时,$D_xf(x_0, \mu_0)$只有一个零特征值,而其他特征值有非零实部.

[例1] 考虑平面系统

$$\dot{x}=\mu-x^2,\qquad \dot{y}=-y.\qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{2.3}$$

当 $\mu=0$ 时,此系统有非双曲平衡点 $O(0,0)$. 因为其向量场 $f(x, y, \mu)$在该处的导算子 $Df(0, 0, 0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$有零特征值. 此系统对 $\mu<0$ 无平衡点;对 $\mu=0$ 有一个在原点处的平衡点(鞍结



$\mu<0$　　$\mu=0$　　$\mu>0$

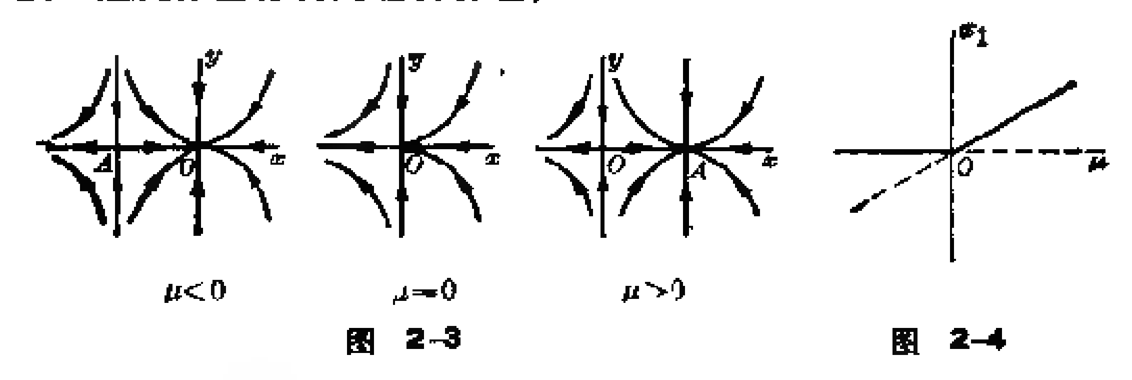
图 2-1　　　　图 2-2

点)；而对 $\mu>0$ 有两个平衡点：稳定结点 $A(\sqrt{\mu}, 0)$ 和鞍点 $B(-\sqrt{\mu}, 0)$．图 2-1 表明了相图随参数 μ 变化的情况．图 2-2 是分岔图，它描述平衡点的位置和稳定性随 μ 变化的情况，其中实线代表稳定平衡点，虚线代表不稳定平衡点．这类分岔称为鞍结分岔，或称极限点分岔．

[例 2]　考虑平面系统

$$\dot{x}=\mu x-x^2, \quad \dot{y}=-y, \qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{2.4}$$

此系统对 $\mu<0$ 有稳定结点 $O(0, 0)$ 和鞍点 $A(\mu, 0)$；对 $\mu=0$ 有一个非双曲平衡点(鞍结点)O，对 $\mu>0$ 有鞍点 $O(0, 0)$ 和稳定结点 $A(\mu, 0)$．图 2-3 和图 2-4 分别给出相图随 μ 变化的情况和分岔图．还可以看到，在 $\mu=0$ 处，平衡点 O 和 A 的稳定性互相交换．这类分岔称为跨临界分岔．



$\mu<0$　　$\mu=0$　　$\mu>0$

图 2-3　　　　图 2-4

[例 3]　考虑平面系统

$$\dot{x}=\mu x-x^3, \quad \dot{y}=-y, \qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

此系统对 $\mu\leqslant 0$ 有稳定结点 $O(0, 0)$．特别地，当 $\mu=0$ 时它是非双曲平衡点；对 $\mu>0$ 有三个平衡点：鞍点 $O(0, 0)$ 和稳定结点

$A(\sqrt{\mu}, 0)$、$B(-\sqrt{\mu}, 0)$. 图2-5和2-6分别给出相图随μ变化情况和分岔图. 这类分岔称为叉形分岔.

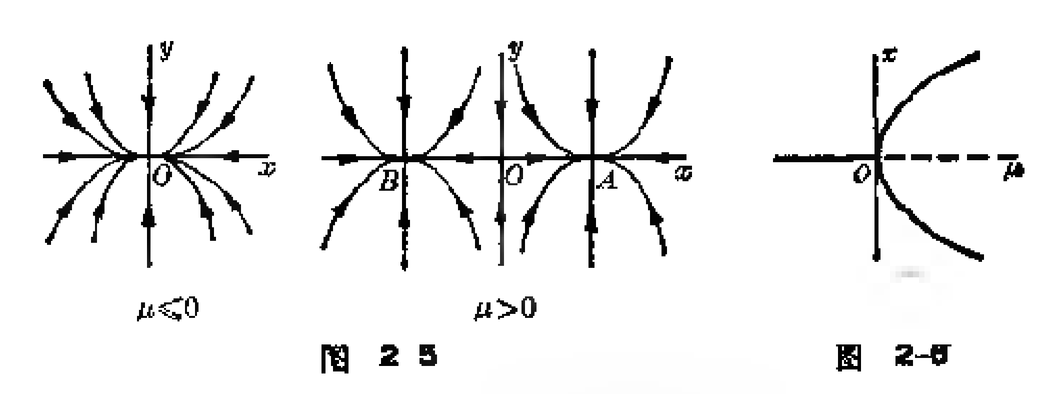


图 2-5　　　　图 2-6

接着考虑非双曲平衡点的另一种简单情形. 此时, $D_xf(x_0, \mu_0)$有一对纯虚特征值, 而其他特征值有非零实部.

[例4]　考虑平面系统(1.1). 此系统对任何$\mu\in\mathbb{R}$都只有一个平衡点$O(0, 0)$, 向量场在该处的导算子为

$$Df(0, 0, \mu)=\begin{pmatrix}\mu & -1\\ 1 & \mu\end{pmatrix}.$$

当$\mu=0$时, $Df(0, 0, 0)$有一对纯虚特征值$\pm i$, 从而点O是非双曲平衡点. 事实上, 由微分方程定性理论可知, 当$\mu\leqslant 0$时点O是稳定焦点, 当$\mu>0$时是不稳定焦点. 因此, 当μ增加并经过$\mu=0$时, 虽然平衡点的数目没有变化, 但它由稳定变为不稳定, 即稳定性发生突然变化; 此外, 还有一个稳定极限环突然从平衡点处"冒出". 这种分岔称为**霍普夫分岔**. (更准确地, 应称为**通有霍普夫分岔**, 见§12). 图2-7表明相图随μ变化的情况. 为简单起见, 在涉及闭轨的分岔问题中, 通常取闭轨的振幅(或截距)r作为分岔图的纵坐标. 图2-8(i)给出上述霍普夫分岔的分岔图, 图上$r>0$的实线代表稳定极限环. 在图2-8(i)上, 极限环是在参数μ大于分岔值的范围内存在的, 这样的分岔称为**超临界霍普夫分岔**. 而在另外的情形中, 极限环是在参数μ小于分岔值的范围内存在的, 这样的分岔称为**亚临界霍普夫分岔**(见图2-8(ii)).

上面介绍了一些重要的平衡点分岔类型. 一般地说, 随着在

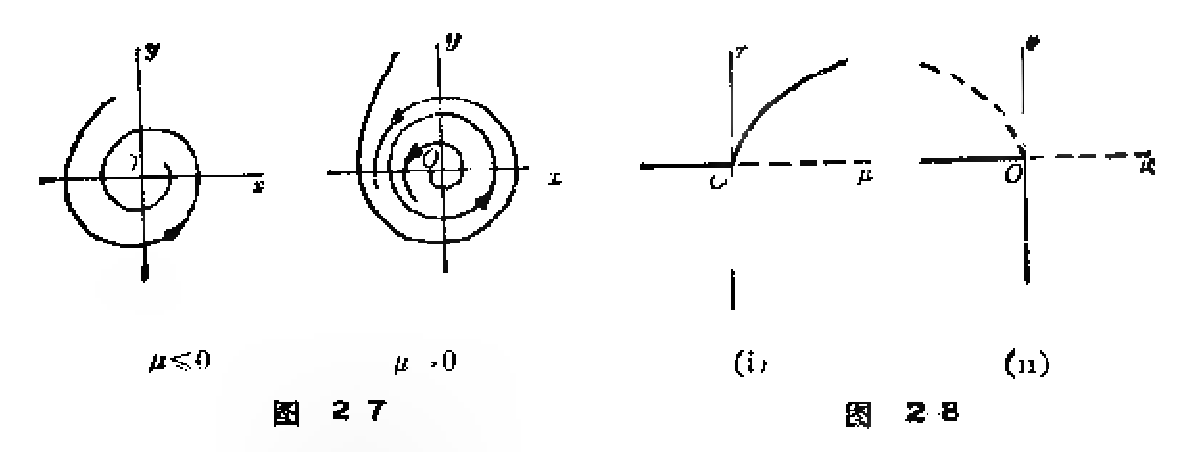


图 2.7　　　　图 2.8

分岔值 μ_0 处的导算子 $D_x f(x_0, \mu_0)$ 的实部为 0 的特征值数目增加，分岔情况也变得更复杂．例如，当 μ 变化并经过 μ_0 时，可能有更多的平衡点或极限环等从非双曲平衡点突然“冒出”．

2．闭轨分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统(2.1)有非双曲闭轨 Γ_0，即庞卡莱映射在对应 Γ_0 的不动点 p_0 处的导算子至少有一个模等于 1 的特征值，则向量场 $f(x, \mu_0)$ 是结构不稳定的．这时，对向量场 $f(x, \mu_0)$ 作适当的小扰动，就可使 Γ_0 附近的轨线拓扑结构发生变化，例如闭轨的产生(或消失)、二维环面的出现等．这种分岔称为**闭轨分岔**，它也属于局部分岔的范畴．

［例 5］　考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-x[\mu-(x^2+y^2-1)^2],\\ \dot{y}=x-y[\mu-(x^2+y^2-1)^2],\end{cases}$$

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R}\qquad(2.6)$$

此方程组在极坐标系中可写成

$$\begin{cases}\dot{r}=-r[\mu-(r^2-1)^2],\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}\qquad(2.7)$$

该系统只有一个平衡点 $O(0, 0)$，它当 $\mu<1$ 时是不稳定焦点；当 $\mu\geqslant1$ 时是稳定焦点(其中，当 $\mu=1$ 时是稳定细焦点)．此外，该系统当 $\mu<0$ 时无闭轨，当 $\mu=0$ 时有一个半稳定极限环 Γ_0(它是一条非双曲闭轨，其庞卡莱映射的导算子的特征值等于 1；当

$0<\mu<1$ 时有两条闭轨 $r=\sqrt{1\pm\sqrt{\mu}}$，其中 Γ_1: $r=\sqrt{1-\sqrt{\mu}}$ 是稳定极限环，Γ_2: $r=\sqrt{1+\sqrt{\mu}}$ 是不稳定极限环；当 $\mu\geqslant1$ 时只有一个不稳定极限环 Γ_2, $r=\sqrt{1+\sqrt{\mu}}$. 图 2-9 表示相图随 μ 变化的情况，图 2-10 给出了分岔图. 显然，当 $\mu=0$ 时出现"非双曲闭轨的鞍结分岔". 随着 μ 增加并经过 $\mu=0$ 时，闭轨 Γ_0 分成两条闭轨 Γ_1 和 Γ_2. 我们注意到，当 $\mu=1$ 时，在原点处还出现亚临界霍普夫分岔. 类似地，还可研究"非双曲闭轨的跨临界分岔"或"叉形分岔"等.

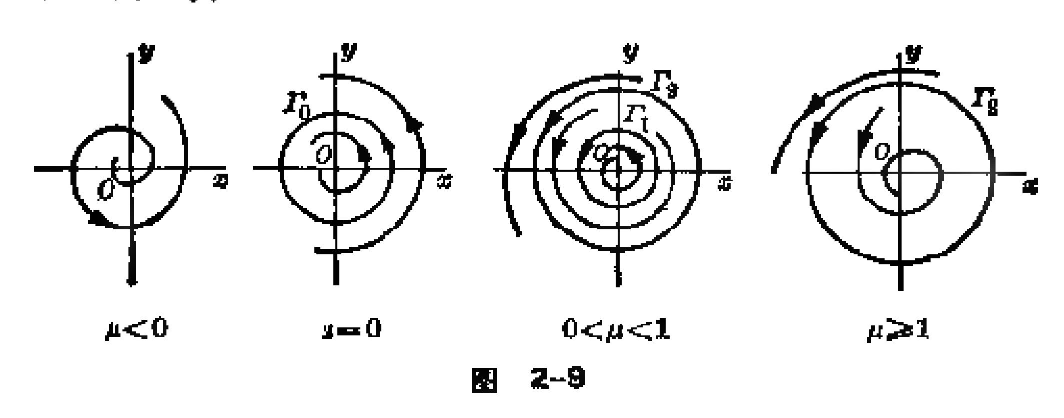


图 2-9

对于高维($n\geqslant3$)连续动力系统的非双曲闭轨，还会出现一些平面系统所没有的闭轨分岔. 例如，当 $\mu=\mu_0$ 时，闭轨的庞卡莱映射有一个特征值等于 -1，而其他特征值的模都不等于1，就可能出现"非双曲闭轨的倍周期分岔"(见图 2-11). 随着 μ 变化并经过 μ_0 时，Γ_0 变成另一条闭轨 Γ_μ，其周期大约为 Γ_0 的周期的两倍. 又如当 $\mu=\mu_0$ 时，闭轨 Γ_0 的庞卡莱映射有一对模为1的复共轭特征值. 随着 μ 变化并经过 μ_0 时，这条非双曲闭轨可能出现分岔，变为一个二维不变环面解(T^2 解)Γ_μ(见图 2-12).

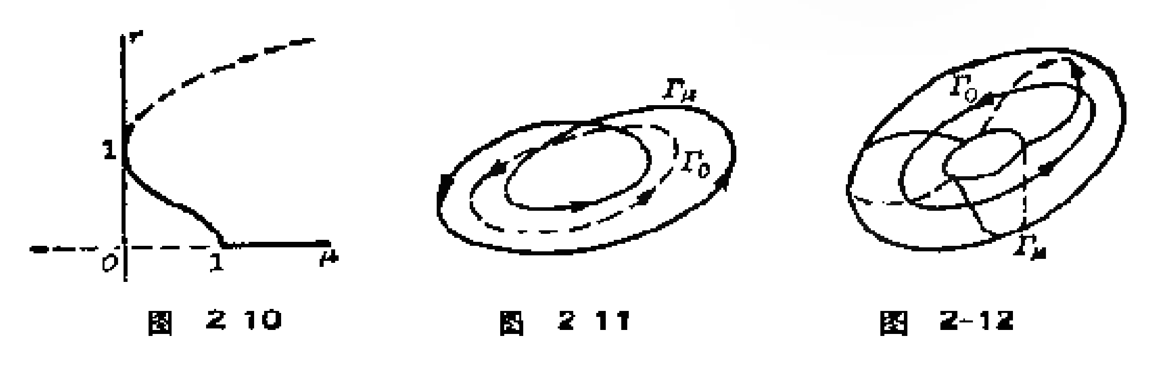


图 2-10　　图 2-11　　图 2-12

应当指出，非双曲闭轨的各种分岔都可以通过其庞卡莱映射的不动点分岔去研究。

3. 同宿或异宿分岔

设当 $\mu=\mu_0$ 时系统(2.1)的平衡点或闭轨的稳定和不稳定流形非横截相交，即该系统存在由非横截同宿点(或异宿点)组成的同宿(或异宿)轨线，则向量场 $f(x, \mu_0)$ 是结构不稳定的。适当的小扰动可以使向量场的拓扑结构发生变化，例如闭轨的产生或消失、不变环面的产生或消失、以至混沌运动出现等。这种分岔称为同宿(或异宿)分岔，它属于全局分岔的范畴。

[例 6] 考虑平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\ \dot{y}&=x+x^2-xy+\mu y.\end{aligned}\qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R}\quad (2.8)$$

此系统有两个平衡点：鞍点 $O(0, 0)$ 和焦点(或结点) $A(-1, 0)$。随着参数 μ 增加，并经过 $\mu=-1$ 时，点 A 由稳定焦点变为不稳定焦点，且有超临界霍普夫分岔出现。由平衡点 A“冒出”的稳定极限环 Γ_μ 随着 μ 的增加不断扩大。当 $\mu=\mu_0\approx$ 0.85 时，Γ_μ 与鞍点 O 相交，并成为鞍点分界线(即同宿轨线)。对 $\mu>\mu_0$，同宿轨线不再存在；另一方面，当 μ 由 μ_0 减少时，同宿轨线也突然消失，变成一个稳定极限环，因此在 μ_0 处出现同宿分岔。图 2 13 和 2 14 分别给出相图随 μ 变化的情况和分岔图(图中 ρ 为极限环到点 A 的最大距离)。

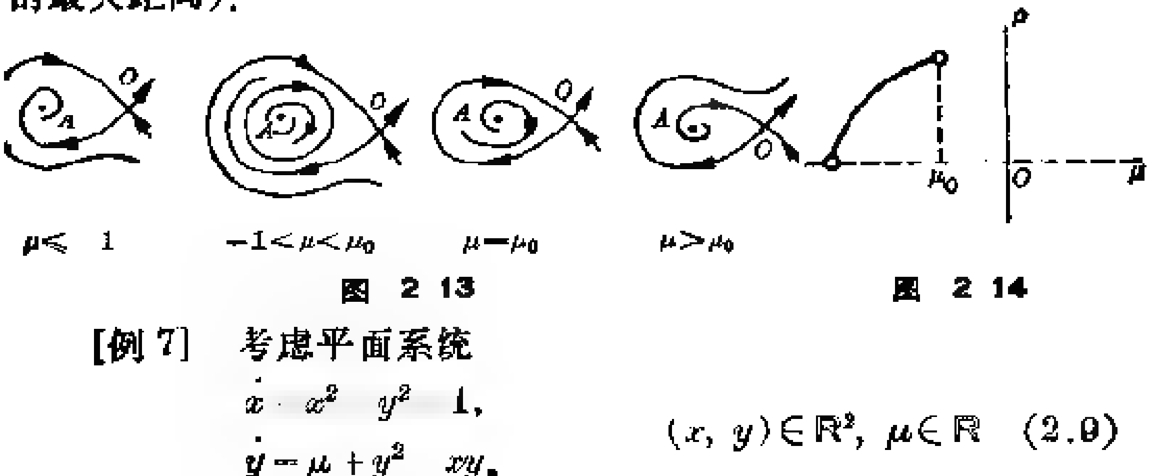


图 2 13　　　　图 2 14

[例 7] 考虑平面系统

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x^2\quad y^2\quad 1,\\ \dot{y}&=\mu+y^2\quad xy.\end{aligned}\qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R}\quad (2.9)$$

此系统在 $\mu=0$ 时有连接鞍点 $A(1, 0)$ 和 $B(-1, 0)$ 的异宿轨线，而当 $\mu\neq0$ 时不存在异宿轨线。因此，在 $\mu=0$ 处出现异宿分岔(见图 2-15)。

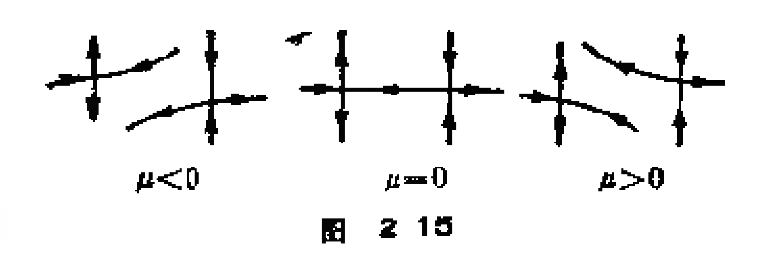


图 2-15

应当指出，如果同宿或异宿分岔导致稳定和不稳定流形横截相交，就存在横截同宿点和斯梅尔(S. Smale)马蹄集，从而出现斯梅尔意义下的混沌运动。

4. 其他分岔

结构不稳定的向量场还可以出现其他形式的分岔。例如"环面分岔"会导致不变环面的产生或消失，以至出现混沌运动。又如"奇怪吸引子分岔"会导致奇怪吸引子的数量或对称性的突然变化。对于受到周期性的外界扰动(如强迫激励或参数激励)的系统，可能出现"次谐分岔"、"超谐分岔"和"准周期分岔"等。对于受到随机性的外界扰动的系统，可能出现不同形式的"随机分岔"。对于无限维动力系统(如由时间演化的偏微分方程、积分-微分方程和时滞微分方程等描述的系统)，其轨线在无限维的巴拿赫(S. Banach)空间或巴拿赫流形上，动力学特性和分岔的研究要比有限维动力系统复杂得多。

在研究向量场分岔时，还可把它们分为静态分岔和动态分岔两大类。静态分岔是指只有平衡点的数目和稳定性发生变化的分岔问题，即研究静态方程

$$f(x, \mu)=0 \tag{2.10}$$

的解的数目和稳定性随参数 μ 变化而出现的突然改变。前面谈及的平衡点的鞍结分岔、跨临界分岔、叉形分岔等，都属于静态分岔。动态分岔是指静态分岔以外的其他分岔问题。霍普夫分岔、闭轨分

岔、环面分岔、同宿或异宿分岔等，都属于动态分岔．本书第3章和第4章将分别对向量场的静态分岔和动态分岔作较详细的讨论．

§2.2 映射的分岔

映射的分岔与向量场的分岔有许多相似之处，也有许多差异。我们尤需注意它们之间的差异．下面以映射的不动点分岔为例作一些说明．

设当 $\mu=\mu_0$ 时映射(2.2)有非双曲不动点 x_0，即 $g(x_0, \mu_0)=x_0$，且对 x 的导算子 $D_xg(x_0, \mu_0)$ 有模等于1的特征值，则该离散动力系统在 $\mu=\mu_0$ 时是结构不稳定的，从而会出现不动点分岔．最简单的不动点分岔有以下类型：

1．$D_xg(x_0, \mu_0)$ 有一个特征值等于1，而其余特征值的模皆不等于1．

［例8］ 考虑映射

$$g: x \mapsto x+\mu+x^2, \qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R} \quad (2.11)$$

它的不动点由方程 $g(x, \mu)=x$ 给出，即满足

$$g(x, \mu)-x\equiv\mu+x^2=0.$$

由此可见，对 $\mu<0$，映射 g 有不动点 $x=\pm\sqrt{-\mu}$.

根据 $\dfrac{\partial g}{\partial x}=1+2x$，可知 $(x, \mu)=(0, 0)$ 是 g 的一个非双曲不动点，因为 $g(0, 0)=0$，$\dfrac{\partial g(0, 0)}{\partial x}=1$．对 $\mu<0$，不动点 $x=\pm\sqrt{-\mu}$ 都是双曲的，它们是否稳定可根据在该处 $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|$ 小于或大于1来判定(参见本书附录第156页)．易知 $x=\sqrt{-\mu}$ 是不稳定的，$x=-\sqrt{-\mu}$ 是渐近稳定的．图2-16给出了不动点及其稳定性随参数 μ 变化的情况．在(0, 0)处出现“鞍结分岔”(亦称“极限点分岔”)．

［例9］ 考虑映射

$$g: x \mapsto x+\mu x-x^2, \qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R} \quad (2.12)$$

该系统在$(x,\mu)=(0,0)$处出现"跨临界分岔"(见图2-17).

[例10] 考虑映射

$$g:\ x\mapsto x+\mu x+x^3,\qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}\tag{2.13}$$

该系统在$(x,\mu)=(0,0)$处出现"叉形分岔"(见图2-18).

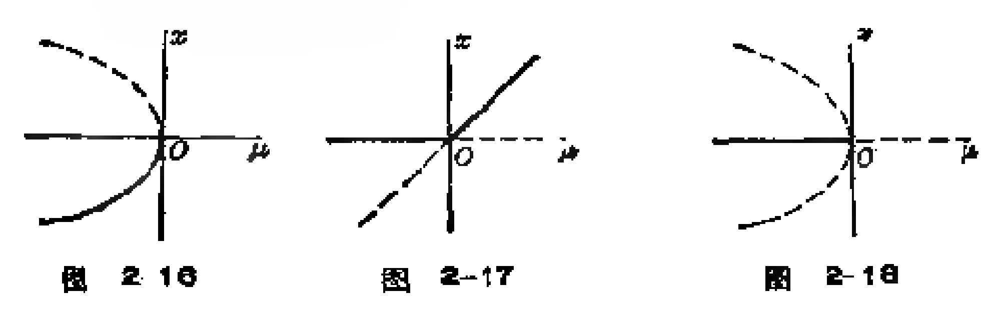


图 2-16　　　图 2-17　　　图 2-18

2. $D_xg(x_0,\mu_0)$有一个特征值等于-1,而其余特征值的模皆不等于1.

[例11] 考虑映射

$$g:\ x\mapsto -x-\mu x+x^3,\qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}\tag{2.14}$$

先研究映射g的不动点的情况. 由方程

$$g(x,\mu)-x=x(x^2-2-\mu)=0$$

得到g的不动点: $x=0$(对$\mu\in\mathbb{R}$)和$x^2=2+\mu$(对$\mu\geqslant-2$). 图2-19画出了这两组不动点的曲线. 可以见到, 在$(x,\mu)=(0,-2)$处出现g的不动点的叉形分岔.

图 2-19

注意到$(x,\mu)=(0,0)$是一个非双曲不动点, 因为$g(0,0)=0$, $\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x}=-1$. 然而,在该点附近, g只有唯一的不动点曲线$x=0$. 因此, 在$(0,0)$处, g的不动点数目没有变化, 只是稳定性发生变化.

我们进一步考虑二次迭代映射

$$g^2:\ x\mapsto g(g(x,\mu),\mu)=x+\mu(2+\mu)x-2x^3+O(x^4).\tag{2.15}$$

对照例10, 我们知道, 在$(x,\mu)=(0,0)$处出现映射g^2的不动点

的叉形分岔．除了$x=0$外，在(0, 0)处还有g^2的另一条不动点曲线

$$x^2=\frac{\mu(2+\mu)}{2}+O(x^3)$$

经过（见图2-19）．因为g^2的不动点就是映射g的周期2点，所以在(0, 0)处出现g的"倍周期分岔"．

应当指出，与一维映射不同，一维向量场不可能出现倍周期分岔．

3．$D_xg(x_0, \mu_0)$有一对复共轭特征值λ_0、$\bar{\lambda}_0$，它们满足$|\lambda_0|=|\bar{\lambda}_0|=1$，而其余特征值的模皆不等于1．

［例12］ 考虑二维映射

$$g:\ (x, y)\mapsto((r+\mu r-r^3)\cos(\theta+\theta_0+\alpha\mu),\ (r+\mu r-r^3)\sin(\theta+\theta_0+\alpha\mu)),\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{2.16}$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$，θ为辐角，θ_0、α是实常数．易见$(x, y)=(0, 0)$始终是一个不动点．特别地，当$\mu=0$时，它是一个非双曲不动点，因为在该处的导算子

$$Dg(0, 0, 0)=\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\end{pmatrix}$$

有特征值$\lambda=\cos\theta_0\pm i\sin\theta_0$其模等于1．

为了研究在$(x, y, \mu)=(0, 0, 0)$附近的分岔情况，我们把(2.16)写成极坐标形式

$$(r, \theta)\mapsto(r+\mu r-r^3,\ \theta+\theta_0+\alpha\mu). \tag{2.17}$$

映射(2.17)有两个不变集：$r=0$和$r=\sqrt{\mu}$（其中$\mu>0$）．图2-20表示这些不变集及其附近的轨线随参数μ变化的情况．当μ增加并经过$\mu=0$时从原点突然"冒出"一个不变集——圆周Γ_μ．这

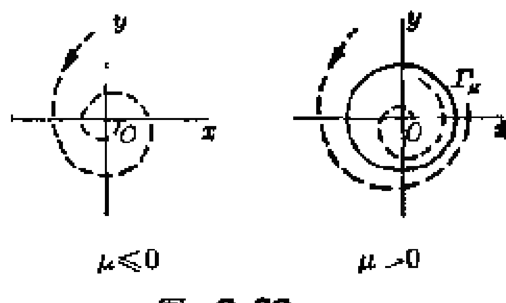


图 2-20

种不变集的变化称为"内依马克-沙克(Ю. И. Неймарк-R. J. Sacker)分岔",亦称为"映射的霍普夫分岔".不动点 $r=0$ 对 $\mu<0$ 是渐近稳定的,而对 $\mu>0$ 是不稳定的.不变圆周 Γ_μ 对 $\mu>0$ 是渐近稳定的.

应当指出,在不变圆周 Γ_μ 中包含系统(2.17)的无穷多条不同的轨线,它们由圆周映射

$$\theta \mapsto \theta+\theta_0+\alpha\mu \tag{2.18}$$

和相应的初始条件决定.如果 $\theta_0+\alpha\mu$ 是有理数,则 Γ_μ 上的所有轨线都是周期的;如果 $\theta_0+\alpha\mu$ 是无理数,则 Γ_μ 上的所有轨线都是准周期的,且都在 Γ_μ 上稠密.当 μ 连续地变动时,在不变圆周 Γ_μ 上的轨线结构在周期情形与准周期情形之间反复变化.与此对照的是,虽然二维向量场的霍普夫分岔所产生的不变集也是一条闭曲线(见例4),但它仅含一条轨线.

与向量场一样,映射还存在除不动点分岔以外的其他形式的分岔,在此不再详述.向量场的分岔和映射的分岔有不少相似之处,特别是对连续流进行离散化处理(例如庞卡莱映射)后,可以将向量场的分岔转化为映射的分岔去研究,可见向量场的分岔和映射的分岔有着密切关系.

附注1 前面的讨论只涉及单参数动力系统的分岔.实际应用中,经常会遇到含多个参数的动力系统.多参数动力系统可以看成对单参数系统的扰动.因此,一般地,我们需要考虑含参数动力系统的分岔性态在小扰动下能否保持的问题.先看下面的例子.

考虑一维单参数系统

$$\dot{x}=f(x,\ \mu)=\mu x-x^3, \qquad x,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{2.19}$$

由§1的例1知道,它的平衡点在 $(x,\ \mu)=(0,\ 0)$ 处出现叉形分岔(见图1.1).取扰动系统

$$\dot{x}=g_1(x,\ \mu,\ \alpha)=\mu x-x^3-\alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R} \tag{2.20}$$

当 $\alpha\neq0$ 时,叉形分岔消失,但出现极限点分岔.图2.21给出 $\alpha>0$ 时的分岔图.再取另一个扰动系统

$$\dot{x} = g_2(x, \mu, \beta) = \mu x - x^3 - \beta x^2, \qquad \beta \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

当 $\beta \neq 0$ 时，叉形分岔也消失，而出现极限点分岔和超临界分岔。图 2-23 给出 $\beta > 0$ 时的分岔图。由此可见，单参数系统(2.19)的分岔性态会随扰动而改变，从而没有保持性†。

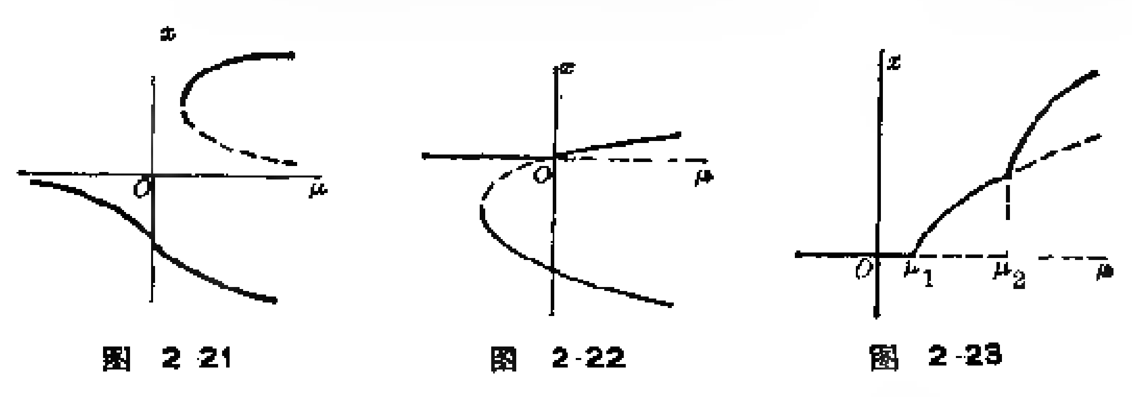


图 2-21　　图 2-22　　图 2-23

如果动力系统的分岔性态不随任何小扰动而改变，则称它是**通有(非退化)的**；反之，则称它是**退化的**。对于单参数向量场族的平衡点分岔，只有鞍结分岔(极限点分岔)和非退化霍普夫分岔是通有的(参看 §14)。对于一维单参数映射的不动点分岔，只有鞍结分岔和倍周期分岔是通有的。小扰动不会影响通有分岔的性态，而退化分岔则不然，因此，可以认为通有分岔是"稳定"的，而退化分岔是"不稳定"的。我们将会看到，通过适当引进附加参数的方法(即"开折"的方法)，可以把退化分岔扩展成通有分岔。

附注 2　在前面的分岔研究中，我们只关心当参数在分岔值附近时动力系统的定性性态的变化。然而，在分岔参数的整个变化范围内，系统可能相继地在不同的分岔值处出现分岔。例如，图 2-23 所示的平衡点分岔，当 $\mu=\mu_1$ 时从基本解 $x=0$ 分出"初级分岔解"，接着当 $\mu=\mu_1$ 时又从初级分岔解分出"二级分岔解"。这种级联分岔密切联系着分岔的模态相互作用，它对于研究动力系统随参数演变的全局过程有重要作用。

附注 3　前面的讨论主要针对有限维动力系统的时间演变行为的分岔现象。对于无限维动力系统(例如连续介质系统)，其状

† 这里未考虑对称性。至于有对称性情形，可参看 §11。

态通常用与时间和空间有关的函数描述. 它的按一定规律分布的时空有序结构称为斑图(pattern)[†]. 不同的斑图在一定的条件下可以相互转化. 有时还会出现在一个系统中多个斑图并存的现象. 斑图动力学(即斑图的形成和演变)与无限维动力系统的分岔和时空混沌等问题密切相关. 近年来发现在一些无限维耗散系统中存在有限维的惯性流形和全局吸引子[18], 这表明我们可能利用对有限维动力系统的研究去了解无限维耗散系统的长时间渐近行为, 从而对斑图动力学研究提供有力的工具.

附注4 动力系统可分为两大类: 确定的和随机的. 确定的动力系统可以用确定性函数描述其状态. 随机的动力系统包含大量样本, 从单个样本来看, 其变化是无规则的; 但是从总体来看, 具有一定的统计规律性. 因此, 需要在建立数学模型时将各种不确定因素化为随机变量或随机过程, 并用概率密度函数或期望、高阶矩等统计特征量去描述随机系统的特性. 于是, 在随机动力系统的定性研究中, 通常用于确定性系统动力学的拓扑性质的提法已经失去意义, 代之的是不变测度(即系统响应的稳态联合概率密度函数)、李雅普诺夫(A.M.Ляпунов)指数、有效势等概念. 因此, 我们不能用传统的方法去定义和研究随机分岔现象. 随机分岔通常是指由参数的随机扰动引起动力系统定性行为的变化. 非线性随机系统的稳定性由其线性化系统的最大李雅普诺夫指数确定, 一般认为当最大李雅普诺夫指数为0时就发生随机分岔. 由此可见, 研究随机分岔的一个关键问题, 是计算非线性随机动力系统的李雅普诺夫指数. 目前, 对随机分岔的研究刚刚开始, 对有关的概念和方法, 尚需深入探讨. 本书中仅讨论确定性系统的分岔问题.

总的来说, 产生分岔的根源在于非线性系统的奇异性. 在这里, 奇异性有着广泛的含义, 它可以反映为动力系统的结构不稳定性、映射的退化性和几何图形的奇点性质等.

---

† 亦称为图样、图象或涨腾等.

§3 分岔的一些应用

本节介绍分岔的一些著名的应用. 这有助于读者加深对分岔本质及其实际应用的认识. 这里只介绍这些重要范例的数学模型和分岔现象, 以后再对其中的一些问题作深入分析.

1. 弹性结构的屈曲

弹性结构的屈曲是常见的固体力学失稳现象. 杆、梁、薄板、薄壳等在一定的外载荷下会出现屈曲. 从数学上说, 弹性结构在静载荷下出现屈曲可以归结为弹性力学平衡方程解的多值性问题, 因此是静态分岔问题. 利用分岔理论, 不但能得到屈曲刚出现时的临界载荷(即分岔值), 而且能对屈曲状态进行定性或定量分析[34],[37].

这里讨论压杆的屈曲问题. 考虑一根等截面的弹性细直杆, 它的端部受到压力 P. 当 P 较小时, 杆件处于单纯压缩状态, 无横向变形. 但当 P 大于某个临界值时, 杆件发生弯曲, 存在横向变形, 这种现象称为**屈曲**, 或称**失稳**.

设杆的长度为 l, 屈曲在 (x, y) 平面上进行, 且屈曲不改变杆长. 用 s 表示从原点 O 起沿杆的弧长, $0\leqslant s\leqslant l$, $u(s)$ 表示变形杆的切线与 x 轴之间的夹角(见图 3-1), $y(s)$ 表示变形杆的横向位移. 杆的弯矩平衡方程为

$$EIu' = -Py, \tag{3.1}$$

其中 E 为杨氏弹性模量, I 为截面惯性矩, u' 表示 u 对 s 的导数. 考虑到 $y' = \sin u$, 并记 $\mu = P/EI$, 可得方程

$$-u'' - \mu \sin u = 0, \qquad 0\leqslant s\leqslant l \tag{3.2}$$

设杆的两端铰接, 于是有边界条件

$$u'(0) = u'(l) = 0. \tag{3.3}$$

记 $C^0[0, l]$ 为区间 $[0, l]$ 上连续的实函数全体, 并引入范数

$\|f\|_0=\max\limits_{0\leq s\leq l}|f(s)|$. 记 $C^k[0, l]$ 为区间 $[0, l]$ 上有直到 k 阶连续导数($k\geqslant1$)的实函数全体，并引入范数 $\|f\|_k=\max\{\|f\|_0, \|f'\|_0, \cdots, \|f^{(k)}\|_0\}$. 我们定义巴拿赫空间

$$\mathscr{X}=\{u\in C^2[0, l]\mid u'(0)=u'(l)=0\},\quad \mathscr{Y}=C^0[0, l]$$

和映射

$$F:\mathscr{X}\times\mathbb{R}\to\mathscr{Y},\quad F(u, \mu)=-u''-\mu\sin u,$$

则直杆的平衡问题(3.2)、(3.3)就是解非线性方程

$$F(u, \mu)=0 \qquad (u, \mu)\in\mathscr{X}\times\mathbb{R} \quad (3.4)$$

的问题. 静态方程(3.4)对任何 $\mu\in\mathbb{R}$ 都有平凡解 $u=0$, 它对应杆的无屈曲状态. 我们称 $u=0$ 为基本解. 杆的屈曲状态对应方程(3.4)的非平凡解 $u\neq0$. 因此，杆的屈曲问题就是研究从方程(3.4)的基本解分出非平凡解的静态分岔问题.

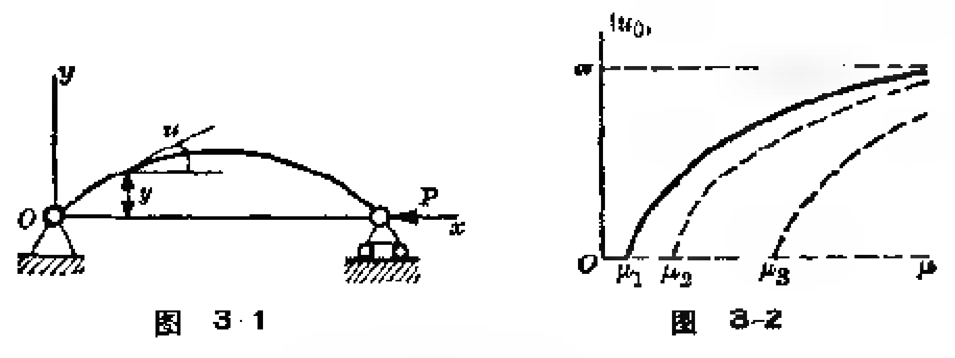


图 3-1　　　　图 3-2

记 $u_0=u(0)$. 图 3-2 给出了方程(3.4)的精确解的分岔图. 在分岔值

$$\mu_m=m^2\pi^2/l^2 \qquad m=1, 2, \cdots$$

处, 都有屈曲解从基本解分出去. 于是，对于 $\mu\in(\mu_m, \mu_{m+1})$, 方程(3.4)除基本解外, 还有 m 个屈曲解 $u_1(s, \mu), \cdots, u_m(s, \mu)$. 它们对应的杆的屈曲变形曲线见图 3-3. 根据最小势能原理，可知当 $0<\mu<\mu_1$ 时, 基本解是稳定的; 而当 $\mu>\mu_1$ 时, 基本解是不稳定的. 于是, 当 μ 超过 μ_1(即压力 P 大于临界值 $EI\mu_1$)时, 杆件失稳, 并出现屈曲. 由最小势

m=1

m=2

m=3

图 3-3

能原理还知道，对固定的$\mu>\mu_1$，在各个屈曲解中，以由μ_1处分出去的解的势能最小，因此，它便是在实际中观察到的稳定的屈曲状态。

2. 非线性振动的分岔

振动是自然界和工程技术中的重要现象。有限个自由度的振动系统是用常微分方程组描述的。由于几何、物理、结构和运动等方面的非线性因素的影响，使非线性振动系统出现许多线性振动所没有的现象，特别是分岔和混沌现象。这里以几个单自由度振动系统的分岔问题说明之。

振动系统出现自激振动，对应着在相空间中产生稳定极限环的分岔现象。例如单自由度振动系统

$$\ddot{x}-\mu\dot{x}+\dot{x}^3+x=0,\qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}\quad(3.5)$$

它可以写成平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x-\mu y+y^3.\end{cases}\qquad(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad(3.6)$$

当参数μ变动时，系统(3.6)的相图的变化如图2-7所示。因此，在$\mu=0$处出现超临界霍普夫分岔(见图2-8(i))。此系统在$\mu>0$时存在自激振动。又如，由著名的范德波(B. Van der Pol)方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0\qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}\quad(3.7)$$

描述的振动系统，可以写成平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x+\mu(1-x^2)y,\end{cases}\qquad(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad(3.8)$$

原点是系统(3.8)的平衡点。它在$\mu<0$时是稳定焦点，在$\mu=0$时是中心，在$\mu>0$时是不稳定焦点。此外，在$\mu>0$时还存在一个稳定极限环(见图3-4)。系统(3.8)在$\mu=0$处出现的分岔称为"庞卡莱分岔"。此系统在$\mu>0$时也存在自激振动

接着考虑单自由度强迫杜芬(G. Duffing)振动系统

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+x+x^3=f\cos\omega t,\qquad x\in\mathbb{R}\quad(3.9)$$

其中ω是强迫力的角频率，μ和f是正的常数。图3-5给出在

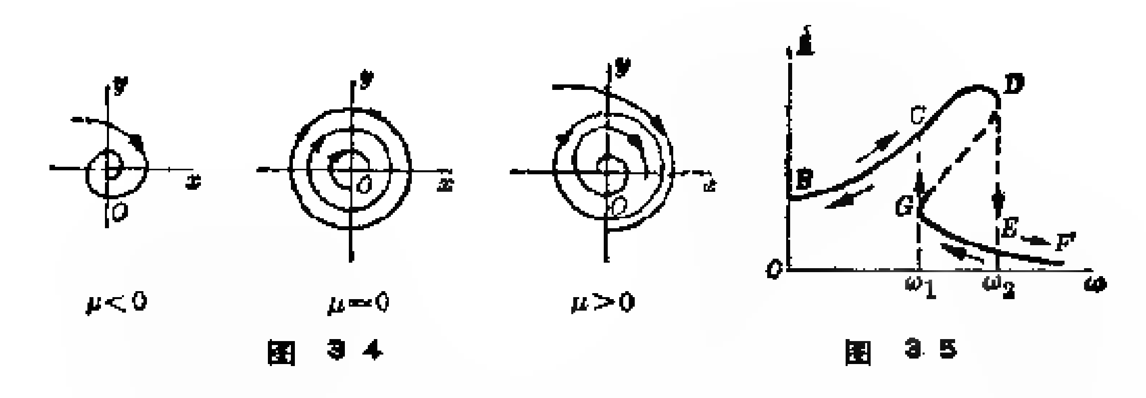


图 3.4　　　图 3.5

μ、f 固定时由摄动法得到的强迫振动振幅 A 与频率 ω 之间的关系(即幅频响应曲线)。显见，在此曲线上的点 D 和 G 处出现极限点分岔。它们对应着系统(3.9)的强迫振动周期解分岔。事实上，当 $0<\omega<\omega_1$ 和 $\omega>\omega_2$ 时，(3.9)只有一个稳定的周期解；当 $\omega=\omega_1$ 和 ω_2 时有两个周期解；而当 $\omega_1<\omega<\omega_2$ 时有三个周期解，其中两个是稳定的，一个是不稳定的。令强迫力的频率 ω 从 0 开始缓慢地增大，相应的强迫振动振幅将沿曲线段 BCD 变化，并在点 D 处突然下降到点 E，然后沿曲线段 EF 变化。相反地，若 ω 从很大的数值缓慢地减少，则振幅将沿曲线段 FEG 变化，并在点 G 处突然上升到点 C，再沿曲线段 CB 变化。这是突跃现象。在振幅发生突跃的同时，相位也发生突跃。此外，当频率 ω 增大时，系统状态由上半支曲线的点 D 下跳到下半支曲线的点 E，但是当频率 ω 减少时，系统在下半支曲线上不是在点 E 而是推迟到点 G 处才上跃到上半支曲线。对上半支曲线，亦有类似情况。这是滞后现象。突跃和滞后都是典型的非线性振动现象，并与分岔密切相关。

在各种共振情况下，有强迫激励、参数激励或自激励的非线性振动系统在不同的参数范围内可能存在不同的振动形态，从而出现复杂的分岔现象(如闭轨分岔、环面分岔、次谐或超谐分岔)以至混沌运动。因此，分岔分析是非线性振动的共振问题的重要研究内容[14, 18]。

3. 化学反应器中的分岔

化学反应器是集中变量系统，通常用常微分方程组描述其变化规律．化学反应器中出现的分岔现象包括多重平衡态和时间振荡行为的产生及其稳定性的改变等．这些现象都是由化学反应过程的复杂机制所决定的．利用分岔理论对化学反应器作出定性或定量的描述，就可以使设计者能在较宽的参数范围内选择化学反应器的最优设计方案，并在运行中进行有效的控制．

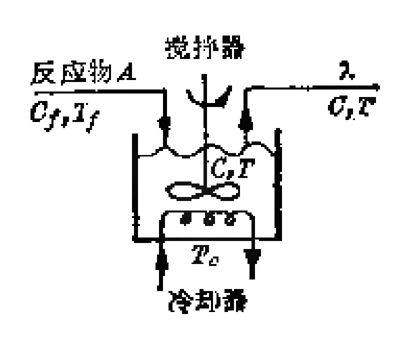


图 3-6

连续搅拌罐式反应器(CSTR)是一种重要的基本化学反应器(见图3-6)．初始浓度和温度分别为 C_f 和 T_f 的反应物 A 以一定的流率输入反应器．在反应器中，反应物被充分搅拌并发生化学反应．在反应器中，反应物的浓度和温度分别为 C 和 T．它们是空间均匀的，但可以随时间变化．一部分反应物(所占比例为 λ)会随着生成物 B 离开反应器．在化学反应过程中产生的热量通过冷却器带走，冷却剂的温度为 T_c．

CSTR 的一级放热不可逆反应过程 $A \to B$ 的质量和能量平衡关系可写成无量纲形式的方程组[24]：

$$\begin{cases} \dot{y} = -\lambda y + D(1-y)E(\theta), \\ \dot{\theta} = -\lambda\theta + \beta_1 D(1-y)E(\theta) - \beta D(\theta - \theta_c), \end{cases} \tag{3.10}$$

其中 $y=(C_f - C)/C$ 是无量纲反应物浓度，$\theta = \gamma(T - T_f)/T_f$ 是无量纲反应物温度，γ、β_1 和 β 分别为无量纲活化能、反应热和热交换系数，$\theta_c = \gamma(T_c - T_f)/T_f$ 是无量纲冷却剂温度，D 是达姆克勒(Damköhler)数，$E(\theta) = \exp[\theta(1+\theta/\gamma)^{-1}]$．研究表明，系统(3.10)有多种静态和动态分岔模式；且当 D 达到某个临界值时，会出现平衡态或周期态的突跃，这就是化学反应中的"猝发"(或"猝灭")过程．

复杂的化学反应器系统包含多种反应物、多个反应步骤和多个反应器等．随着状态变量数目的增加，系统将呈现更丰富的分

岔行为.

4. 热对流系统和洛伦兹系统的分岔

热对流问题在大气物理学、天体物理学、溶液力学和工业技术中都有重要应用. 考虑底部受热的均匀厚度的水平流体层. 设底部温度 T_0 高于顶部温度 T_1, 且流体受到重力作用(见图 3-7). 当底部流体受热膨胀时, 下面的流体密度小于上面的流体密度. 于是, 在重力场中, 上面的流体有下沉的趋势, 而下面的流体有上浮的趋势. 然而, 在温度梯度很小时, 由于流体粘性的阻碍, 流体处于稳定的静止状态, 在流体内部只有热传导, 温度随高度成线性变化. 只有在温度梯度较大时, 流体的静止平衡状态失稳, 才出现热对流运动, 通常称为瑞利-贝纳特(Lord Rayleigh-H Bénard)对流. 实验表明, 当温度梯度超过某个临界值之后就出现热对流. 起初它是定常运动, 其内部自发地形成规则的对流胞腔, 这些胞腔通常是水平的长柱形, 其截面是矩形. 但有时也可以出现截面为正三角形、矩形或正六角形的垂直胞腔. 我们可以把流体的静平衡状态作为基本状态, 从而上述定常热对流状态就是初级分岔状态. 随着温度梯度进一步增大, 还会出现其他的分岔, 并且最终变为湍流[24],[30].

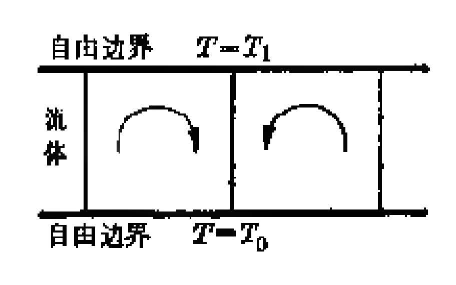


图 3-7

假设在流体动力学方程组中, 除重力项外, 在其他各项中都取密度为常数; 在重力项中, 密度是温度的线性函数, 而与压强无关. 于是得到无量纲形式的基本方程组:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + P_r\theta\boldsymbol{k} + P_r\nabla^2\boldsymbol{v}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \\ \theta_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\theta = \nabla^2\theta + R_a w, \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $\boldsymbol{v}=(u, v, w)$、p、θ 分别为无量纲的速度向量、压强和温度, z 轴垂直向上, $\boldsymbol{k}$ 是沿 z 轴正向的单位向量, P_r 和 R_a 分别为普朗特

(L. Prandtl)数和瑞利数，其定义如下：

$$P_r=\frac{\nu}{\varkappa},\quad R_a=\frac{\alpha g\Delta T h^3}{\varkappa\nu}. \tag{3.12}$$

ν、$\varkappa$、α 是流体的运动粘性系数、热传导系数和热膨胀系数，g 是重力加速度，$\Delta T=T_0-T_1$，h 为流体层的厚度．方程组(3.11)通常称为奥勃贝克-波辛尼斯克(Oberbeck J.Boussinesq)方程组．它可以用来对瑞利-贝纳特热对流的分岔问题进行理论分析．

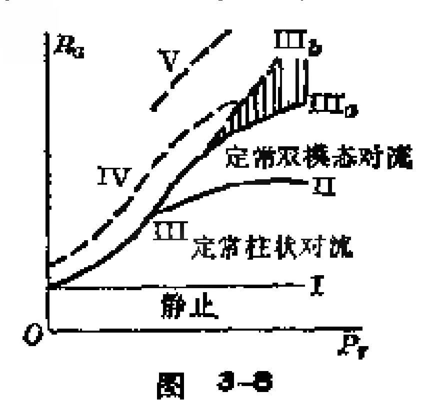


图 3-8

图 3-8 给出了不同的热对流状态之间的转变关系．曲线 I 对应由静止状态向定常二维热对流(柱状对流)的过渡．曲线 II 对应向定常三维热对流的过渡．曲线 III 对应向非定常三维热对流的过渡(其中曲线 III_a 和 III_b 之间是尚未清楚的区域)．在曲线 IV 的上方将出现有更高频率(例如倍频)的非定常热对流．最后，在曲线 V 上方对应的流动已完全变为湍流了．

除了重力之外，表面张力也是在局部受热的流体中出现热对流的一个重要原因．当流体表面局部地受热时，表面张力变小，该处的流体被邻近表面拉开，从而引起局部压强下降和流体从下往上流．这种由表面张力引起的热对流现象称为热毛细管对流或马格兰哥尼(Marangoni)效应，它也存在丰富的分岔现象．通常的热对流是重力与表面张力共同作用的结果．

洛伦兹(E. N. Lorenz)讨论了柱状胞腔情形．这是在矩形区域中的二维热对流问题，考虑到流体的不可压缩性条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，速度场 $\boldsymbol{v}$ 可用流函数 ψ 代替，使得 $\boldsymbol{v}=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$．假设流函数 ψ 和温度 θ 在矩形区域内可对空间变量展成傅里叶级数，其系数与时间 t 有关．将傅里叶展开式代入方程组(3.11)，并只取头三个模态进行截断，便得到由三个一阶常微分方程构成的方程组：

$$\begin{cases}\dot{X}=-\sigma(X-Y),\\ \dot{Y}=rX-Y-XZ,\\ \dot{Z}=XY-bZ,\end{cases}\tag{3.13}$$

其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是流函数和温度的傅里叶展开式的第一项的系数，$Z(t)$ 反映沿垂线的温度型. 在方程组(3.13)中的常数有: $\sigma=P_r$(普朗特数)，$r=R_a$(瑞利数)，$b=4/(1+a^2)$，a 是矩形的长宽比. 方程组(3.13)称为洛伦兹系统. 详细的理论和计算分析表明[29]，洛伦兹系统存在复杂的动力学行为，包括平衡点的叉形分岔和霍普夫分岔，闭轨的叉形分岔、鞍结分岔和倍周期分岔，同宿轨线分岔等和混沌运动.

与洛伦兹系统类似的还有洛斯勒(O. E. Rössler)系统:

$$\begin{cases}\dot{X}=-Y-Z,\\ \dot{Y}=X+aY,\\ \dot{Z}=b+Z(X-c),\end{cases}\tag{3.14}$$

其中 a、b、c 是常数. 与洛伦兹系统不同，洛斯勒系统不具有对称性. 然而，它同样具有复杂的动力学行为.

5. 旋转流体系统的分岔

在容器内部(例如圆筒或球面之间)的旋转流体在不同的条件下会呈现复杂的动力学行为. 这里考虑在两个同轴的转动圆筒之间的粘性流体的流动的分岔问题[24],[30]. 内、外圆筒的转动角速度分别为 Ω_1 和 Ω_2. 先讨论外圆筒静止($\Omega_2=0$)的情形. 当 Ω_1 很小时，流体绕圆筒的轴线作水平圆周运动，称为库塔(M. Couette)流动. 当 Ω_1 超过某个临界值 Ω_c 时，均匀圆周流动失稳并出现新的定常流动——泰勒涡流(见图 3-9). 这种流动是轴对称的，沿着圆筒轴线方向规则地分布着旋涡，相邻的旋涡是反向的. 除了旋涡运动之外，流体还绕着圆筒轴线运动. 如果继续增大 Ω_1，使之达到新的临界值 Ω_c'，泰勒涡流就变得不稳定，并出现波状涡流. 这

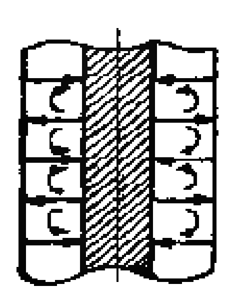


图 3-9

种流动是非定常的，旋涡不但沿着轴线方向规则地分布，而且以波动方式绕着圆筒轴线运动．再进一步增大Ω_1，还会遇到调制波状涡流等，最后通过湍流状的泰勒涡流发展为完全的湍流．

接着讨论其他情形．对于内圆筒静止($\Omega_1=0$)的情形，流体始终是绕圆筒轴线作圆周运动．至于两个圆筒都转动的情形，流动的情况更为复杂．例如，在不同条件下会出现螺旋涡流、扭状涡流、交叉螺旋涡流、间歇涡流、螺旋湍流等．上述流动状态之间的相互转变表明，在同轴的圆筒之间的流动存在十分丰富的分岔现象．

下面建立在内、外圆筒之间的流动的基本方程组和边界条件．采用圆柱坐标系$(r,\ \varphi,\ z)$，并记流动速度$\boldsymbol{v}=(U,\ V,\ W)$，压强为$P$．设圆筒无限长，且略去外力场，则无量纲形式的流动方程组可写成[24]：

$$
\begin{cases}
U_t=\nabla^2 U-2V_\varphi/r^2-U/r^2-P_r-R_1[UU_r\\
\qquad +VU_\varphi/r+WU_z-V^2/r],\\
V_t=\nabla^2 V+2U_\varphi/r^2-V/r^2-P_\varphi/r-R_1[UV_r\\
\qquad +VV_\varphi/r+WV_z+UV/r],\\
W_t=\nabla^2 W-P_z-R_1[UW_r+VW_\varphi/r+WW_z],\\
U_r+U/r+V_\varphi/r+W_z=0,
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

其中

$$
\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},
$$

$\eta/(1-\eta)<r<1/(1-\eta)$（$\eta$是内、外圆筒的半径比），$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$-\infty<z<\infty$．$R_1$是内圆筒的雷诺数，即$R_1=r_1\Omega_1 d/\nu$，$d$是外、内圆筒的半径之差，$\nu$是运动粘性系数．在内、外圆筒表面处的粘性流体的无滑移边界条件为

(i) 在$r=\eta/(1-\eta)$处，$(U,\ V,\ W)=(0,\ 1,\ 0)$；

(ii) 在$r=1/(1-\eta)$处，$(U,\ V,\ W)=(0,\ \mu/\eta,\ 0)$，

其中μ是角速度之比Ω_2/Ω_1．利用上述方程组和边界条件，可以研究各种分岔流动状态及它们之间的相互关系．

6. 反应-扩散系统的分岔

许多化学反应中同时存在反应和扩散过程. 考虑由 m 个组分组成的反应-扩散系统, u_k 是第 k 个组分的密度($k=1, \cdots, m$), 它们通常是时间 t 和空间变量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数. 取系统的状态变量 $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_m)$ 和控制参数 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \cdots, \mu_l)$. 在大多数情况下, 扩散过程遵从菲克(A. E. Fick)扩散定律[31],[32]. 这时, 各个组分由于空间非均匀性而引起的扩散流分别由下面的向量表示:

$$\boldsymbol{j}_k=-\boldsymbol{D}_k \nabla u_k, \qquad k=1, \cdots, m \quad (3.16)$$

其中 $\boldsymbol{D}_k$ 是扩散矩阵($k=1, \cdots, m$). $\boldsymbol{D}_k$ 是正定矩阵, 在应用中往往是对角矩阵, 且可以是与密度有关的. 记在反应中各个组分的生成率分别为 f_k(其中 $k=1, \cdots, m$), 它们也可以是与密度等有关的. 根据各个组分的质量平衡关系:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=-\nabla \cdot \boldsymbol{j}_k+f_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}), \qquad k=1, \cdots, m \quad (3.17)$$

和(3.16), 便得到下面的反应-扩散方程:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\nabla \cdot(\boldsymbol{D}_k \nabla u_k)+f_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}), \qquad k=1, \cdots, m \quad (3.18)$$

特别地, 当 $\boldsymbol{D}_k$ 都是对角矩阵($k=1, \cdots, m$), 且对角线元素为常数 d_k 时, 方程(3.18)可写成

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=d_k \nabla^2 u_k+f_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\mu}), \qquad k=1, \cdots, m \quad (3.19)$$

其中 d_k 称为扩散系数($k=1, \cdots, m$). 反应-扩散方程(3.18)和(3.19)是二阶抛物型偏微分方程, 通常还要给出适当的初始条件和边界条件. 我们也可以把它们作为在巴拿赫空间上的半动力系统(见附录的第 152 页)去处理.

在某些情况下, 例如对二元系的相不稳定区中的自发相分离过程[24],[32], 菲克扩散定律不再定性正确了. 这时, 要对扩散定律作重大修正. 一个著名的修正是凯恩-希里亚特(J. W. Cahn-J. E. Hilliard)广义扩散定律:

$$\boldsymbol{j}_k=-\boldsymbol{D}_k \nabla u_k+p_k \nabla(\nabla^2 u_k), \qquad k=1, \cdots, m \quad (3.20)$$

其中扩散矩阵 D_k 与 u 有关，p_k 可以近似地看作一个正常数．把(3.20)代入(3.17)，便得到四阶的广义反应-扩散方程：

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\nabla\cdot(D_k\nabla u_k)-p_k\nabla^4 u_k-f_k(u,\ \mu),$$

$$k=1,\ \cdots,\ m \qquad (3.21)$$

与方程(3.18)相比，在方程(3.21)中出现了额外的与密度的四阶导数成正比的项，它反映物质的空间不均匀性对自由能，继之对扩散流的影响．在燃烧的火焰面传播问题也会遇到类似的方程[18]．

反应-扩散系统的状态一般与时间和空间变量都有关，加上反应和扩散过程的相互耦合，因此，在反应-扩散系统中必然存在复杂的动力学现象．研究表明，非线性的反应和扩散之间的竞争在一定条件下会导致各种时空有序结构(例如空间周期定常状态(与 t 无关)、时间周期状态(与 x 无关)、驻波、行波等)和时空混沌结构．这些时空结构的形成和转化，都是反应-扩散系统分岔问题的研究内容．这里介绍两个在反应-扩散系统的分岔研究中起重要作用的模型．

布鲁塞尔振子(Brusselator)模型(亦称为三分子模型)是普里高津(I. Prigogine)等在1968年提出的一种化学动力学模型[81]．它在不同条件下呈现丰富多采的动力学行为，因此是一个重要的理论模型．考虑到扩散的影响，布鲁塞尔振子系统由下面的方程组描述：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial t}=A-(B+1)X+X^2Y+D_1\nabla^2X,\\[2mm] \dfrac{\partial Y}{\partial t}=BX-X^2Y+D_2\nabla^2Y,\end{cases} \qquad (3.22)$$

其中 X、Y 是两种反应物的浓度，D_1、$D_2>0$ 是扩散系数，A、$B>0$ 是参数．如果系统定义在有界区域内，则在边界上还要附加适当的边界条件(例如狄利克雷(P. G. Dirichlet)条件或诺伊曼(C. G. Neumann)条件等)．

在一些化学反应过程中，即使开始时反应物是空间均匀的，但

是在一定的条件下可以观察到化学振荡、空间花样、化学波等时空有序结构. 其中最著名的是贝洛索夫-查波丁斯基(B.B.Белосов-A.M.Жаботинский)反应(简称B-Z反应). 这是一类在以金属离子作催化剂的条件下, 有机酸(如柠檬酸、丙二酸等)被溴酸氧化的化学反应[31]~[34]. 为了在理论上解释B-Z反应中的现象, 诺伊斯(R.M. Noyes)等提出一个简化模型, 通常称为俄勒冈振子(Oregonator)模型. 考虑扩散项后, 它由下面的方程组描述:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}=k_1AY-k_2XY+k_3BX-2k_4X^2+D_1\nabla^2X, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial t}=-k_1AY-k_2XY+fk_5Z+D_2\nabla^2Y, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial t}=k_3BX-k_5Z+D_3\nabla^2Z, \end{cases} \tag{3.23}$$

其中 X、Y、Z 是三种反应物的浓度, A、B 是常数, k_1、…、k_5 是反应速率常数, D_1、D_2 和 D_3 是扩散系数, f 是某个化学计量系数. 此外, 人们还提出了其他的模型[34]. 这些模型的研究, 不仅表明了平面波、螺旋波、靶环波等的存在性, 并显示了张弛振动的特征.

最后指出, 如果反应-扩散系统是空间均匀的, 即 $u_k=u_k(t)$, 其中 $k=1, \cdots, m$, 则不存在扩散过程, 反应-扩散方程成为一阶常微分方程(组). 此外, 如果反应-扩散系统是与时间无关的, 即 $u_k=u_k(x)$, 其中 $k=1, \cdots, m$, 则反应-扩散方程成为静态方程.

7. 生物系统的分岔

在生物系统中, 从亚细胞水平的生物化学反应和膜结构、细胞水平的调节、超细胞水平的形态发生、各种器官和神经的活动、直到生物群体和社会的进化、竞争、协作和信息传递等, 都是极复杂的非线性问题[31]. 我们要深入了解各种生物现象, 就必须对不同层次的生物系统的动力学行为进行详细的分析. 由于在分子的范围内, 输运(如扩散、对流、离子迁移等)和反应(特别是酶反应)是生化振荡与有序结构的形成和演变的主要机理, 因此反应-扩散系

统在生物非线性动力学研究中起着重要的作用. 这里仅对新陈代谢过程的糖酵解反应和神经纤维的信号发生与传递过程的模型作简单的介绍.

糖酵解过程是在生物体的新陈代谢循环中由葡萄糖转化为乳酸的过程. 它是为生命提供能量的过程. 对维持生命起着极为重要的作用. 糖酵解反应的总过程可表示为[32]:

$$\mathrm{GLU}+2\mathrm{ADP}+2\mathrm{Pi}\longrightarrow 2\mathrm{LAC}+2\mathrm{ATP}, \qquad (3.24)$$

其中 GLU 代表葡萄糖, ADP 代表二磷酸腺苷, Pi 代表磷酸, LAC 代表乳酸, ATP 代表三磷酸腺苷. 人体中各种组织活动所需的能量要靠 ATP 提供. 实际的糖酵解反应过程是在各种酶的作用下进行的, 中间过程至少涉及十多种中间化合物和各种生物催化剂——酶. 主要的中间产物是 F6P(磷酸果糖)、FDP(二磷酸果糖)、PEP(磷酸烯醇丙酮酸)、PYR(丙酮酸)和 ATP. 下面以[ ]表示浓度, 糖酵解反应方程可写为

$$\begin{cases}\dfrac{d[\mathrm{F6P}]}{dt}=v_1-v_2,\\ \dfrac{d[\mathrm{FDP}]}{dt}=v_2-v_3,\\ \dfrac{d[\mathrm{PEP}]}{dt}=2v_3-v_4,\\ \dfrac{d[\mathrm{PYR}]}{dt}=v_4-v_5,\\ \dfrac{d[\mathrm{ATR}]}{dt}=-v_1-v_2+2v_3+v_4-v_6,\end{cases} \qquad (3.25)$$

其中 v_i 是各主要中间反应步骤的反应速率($i=1, \cdots, 6$):

$$v_1=a,$$

$$v_2=b[\mathrm{F6P}]^n(k_2+k_2R_2[\mathrm{ATP}]^n/[\mathrm{AMP}]^n+[\mathrm{F6P}]^n)^{-1},$$

$$v_3=k_3[\mathrm{FDP}]^\alpha-\bar{k}_3[\mathrm{PEP}]^\beta,$$

$$v_4 = c[\mathrm{PEP}]^{\gamma}(k_4 + k_4 R_4[\mathrm{ATP}]^{m}/[\mathrm{FDP}]^{m} + [\mathrm{PEP}]^{\gamma})^{-1},$$

$$v_5 = k_5[\mathrm{PYR}],$$

$$v_6 = k_6[\mathrm{ATP}].$$

AMP 代表一磷酸腺苷，a、b、c、k_2、…、k_6、R_2、R_4、m、n、α、β、γ 为适当的参数，它们的值取决于实验条件．此外，还有关系式：

$$[\mathrm{ATP}][\mathrm{AMP}][\mathrm{ADP}]^{-2} = K, \tag{3.26}$$

$$[\mathrm{ATP}] + [\mathrm{ADP}] + [\mathrm{AMP}] = A, \tag{3.27}$$

其中 K 是平衡常数，A 是腺嘌呤核苷酸的总浓度．数值计算和实验都观察到持续的振荡行为和霍普夫分岔．前面的分析是在空间均匀的情况下给出的．如果对活体或没有充分搅拌的实验，反应物不是空间均匀的，我们不能忽略扩散过程及系统的几何形状、边界条件的影响．这时要在方程(3.25)中加上扩散项，并要考虑边界条件．研究表明了在一定条件下会出现与时间有关的时空有序结构(如驻波、传播波或空间均匀的振荡等)．

神经系统(如大脑皮层)由大量神经元构成．神经元通常由细胞体、树突(即输入端)和轴突(即输出端)组成．一神经元的轴突与另一神经元的树突的结合部称为突触．每个神经元可有 10^3～10^5 个突触，它们决定神经元之间的相互作用强度和性质．神经系统是一个广泛连接的高度非线性的动力系统．虽然每个神经元的结构和功能十分简单，但是由大量神经元构成的神经系统的动力学行为是十分复杂的．令 V 表示细胞膜电势，它通常是时间和空间变量的函数．我们可以通过 V 的变化去了解在神经系统中信号发生与传递的过程．一个著名的模型是霍特金(A. L. Hodgkin)和赫克斯利(A. F. Huxley)在 1952 年在研究柔鱼的大轴突时建立的[55]．记 I_a 为外加的电流，m 为钠离子活化率，h 为钠离子钝化率，n 为钾离子活化率．HH 模型由下面的方程组表示：

$$
\begin{cases}
C\dfrac{\partial V}{\partial t}=D\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-g_{Na}m^3h(V-V_{Na})-g_Kn^4(V-V_K)\\
\qquad\qquad -g_L(V-V_L)+I_a(t),\\
\dfrac{dm}{dt}=\dfrac{m_\infty(V)-m}{\tau_m(V)},\\
\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{h_\infty(V)-h}{\tau_h(V)},\\
\dfrac{dn}{dt}=\dfrac{n_\infty(V)-n}{\tau_n(V)},
\end{cases}
\tag{3.28}
$$

其中 g_{Na}、g_K、g_L、V_{Na}、V_K、V_L 为常数，m_∞、h_∞、n_∞ 为稳态值，τ_m、τ_h、τ_n 为特征时间，C、D 也是常数. 大量的数值计算和实验结果表明，在 HH 模型中，选取不同形式的 I_a，可以激发脉冲、周期振荡、行波等，并观察到分岔现象. 图 3-10 对不同温度给出在空间均匀(即 V 只与时间有关)情况下方程(3.28)的周期解随 I_a 变化的结果，图中

$$V_a=\max V(t)-\min V(t)$$

为周期解的振幅. 在图上可以见到霍普夫分岔和周期解的鞍结分岔.

图 3-10

为了便于理论分析，菲兹·休(R. Fitz Hugh)和纳古莫(J. S. Nagumo)等独立提出简化的模型(FHN 模型)[36],[37]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-f(v)-w+I_a,\\
\dfrac{\partial w}{\partial t}=\alpha(v-\beta w),
\end{cases}
\tag{3.29}
$$

其中 v 是类似于膜电势的变量，w 是起着在 HH 模型中 h 和 n 的作用的变量，α 和 β 是正参数，$f(v)$ 是一个非线性函数，通常取

$$f(v)=v(1-v)(a-v),\qquad 0<a<1/2 \tag{3.30}$$

FHN 模型和 HH 模型一样，广泛地用于神经系统的动力学研

究中.

8 映射的分岔

由映射定义的离散动力系统的动力学研究，一般比较简洁、直观，并且与连续动力系统有密切的联系，因此受到人们的重视．特别地，在探讨通向混沌的道路时，映射的分岔研究发挥了巨大的作用．这里以逻辑映射的著名例子说明之．

考虑逻辑映射[88],[89]

$$x_{i+1}=G(x_i;\mu)\equiv\mu x_i(1-x_i). \tag{3.31}$$

当 $x\in[0,\ 1]$，参数 $\mu\in[0,\ 4]$ 时，G 是 $[0,\ 1]$ 上的一个自映射．当 $0\leqslant\mu<\mu_0=1$ 时，映射 G 只有一个不动点 $x_1=0$，它是稳定的．当 $\mu_0\leqslant\mu<\mu_1=3$ 时，映射 G 有两个不动点：$x_1=0$ 和 $x_2=1-\mu^{-1}$．x_1 是不稳定的，x_2 是稳定的．当 $\mu_1\leqslant\mu<\mu_2=1+\sqrt{6}$ 时，映射 G 的不动点 x_1 和 x_2 都是不稳定的，但对二次迭代映射 G^2 来说，有四个不动点 x_1、x_2、x_3 和 x_4，其中

$$x_{3,4}=\left[1+\mu\pm\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}\right]/2\mu. \tag{3.32}$$

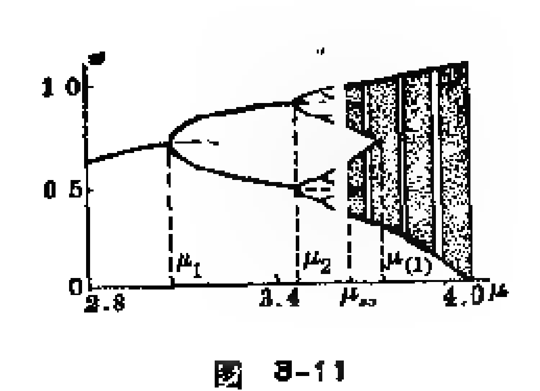


图 3-11

它们都是映射 G 的周期 2 点，x_1、x_2 是不稳定的，x_3、x_4 是稳定的．由此可见，在 μ_1 处出现倍周期分岔（参看 §2 的例 11）．这个过程可以一直延续下去．一般地说，当 $\mu_{m-1}\leqslant\mu<\mu_m$ 时，n 次迭代映射 $G^n(n=2^{m-1})$ 有 2^m 个不动点，它们是映射 G 的周期 n 点，其中有 2^{m-1} 个是稳定的（见图 3-11）．μ_m 都是倍周期分岔的分岔点（$m=1,\ 2,\ \cdots$）．无穷序列 $\{\mu_m\}$ 有一个极限值 $\mu_\infty=3.569945672\cdots$．当 $\mu=\mu_\infty$ 时，此系统有无穷多个周期 ∞ 点，并出现在总体上是稳定的奇怪吸引子，从而进入混沌状态．

逻辑映射 G 在 $\mu_\infty\leqslant\mu\leqslant4$ 的范围内存在混沌区，并有复杂的现象．当 $\mu=4$ 时，混沌区是连成一片的．当 μ 从 4 起逐渐减小

时，混沌区出现倒分岔过程．例如，在 $\mu_{(1)}=3.678573511\cdots$ 处，混沌区由一片变成两片，在 $\mu_{(2)}$ 处又由两片变成四片，等等．无穷序列 $\{\mu_{(m)}\}$ 亦以 μ_∞ 为极限值．此外，在混沌区内还有不同的周期窗口序列，它们又有各自的倍周期分岔和倒分岔过程．这种周期倍化和倒分岔现象还会在越来越细的层次上重复出现，成为一种无穷的自相似结构．

在熟知的通向混沌的道路中，除了上面提到的倍周期分岔道路之外，还有阵发性道路和准周期分岔道路[24],[40]等．后两条道路也与分岔密切相关．阵发性发生在切分岔(即鞍结分岔)附近，准周期分岔就是环面分岔．它们都可以通过简单的映射(如逻辑映射和圆周自映射)进行初步研究．

§4 突变、自组织与分岔

突变(catastrophe)是指一个光滑(即足够高次连续可微)系统的状态在外界条件连续变化时产生的突然变化[2],[41],[42]．简单地说，突变理论研究光滑系统中的不连续现象．它紧密联系着映射的奇异性理论和动力系统的分岔理论．

在突变理论中，最基本和用得最广泛的是托姆(R. Thom)提出的"初等突变理论"．考虑梯度动力学系统

$$\dot{x}=-\nabla_x V(x,\mu),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\ \mu\in\mathbb{R}^m \tag{4.1}$$

其中 x 是状态变量，μ 是控制变量(即分岔参数)，V 是势函数．显然，梯度系统的平衡点 x_0 满足

$$\nabla_x V(x_0,\mu)=0. \tag{4.2}$$

这表明 x_0 就是势函数的临界点．初等突变的类型是梯度系统按拓扑结构划分的等价类．托姆等对控制变量个数不大于5的初等突变的临界点进行了分类．显然，初等突变理论实质上是含参数的梯度系统的分岔理论，只是前者直接涉及的是势函数 V，而后者则是梯度向量场．这里只对初等突变中最重要的尖点(cusp)突

变作此介绍。

尖点突变的势函数是

$$V = x^4 + u_1 x^2 + u_2 x, \qquad x \in \mathbb{R},\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.3}$$

V 的临界点(即梯度向量场的平衡点)满足

$$\nabla_x V = 4x^3 + 2u_1 x + u_2 = 0. \tag{4.4}$$

它们的全体在(x, u_1, u_2)空间中的集合称为平衡曲面(或突变流形)M(见图 4-1)。这是一个有皱折的曲面。对于控制变量的不同数值,可以有一个、两个或三个临界点。在平衡曲面上有垂直切线的点满足

$$\nabla_x(\nabla_x V) = 12x^2 + 4u_1 = 0. \tag{4.5}$$

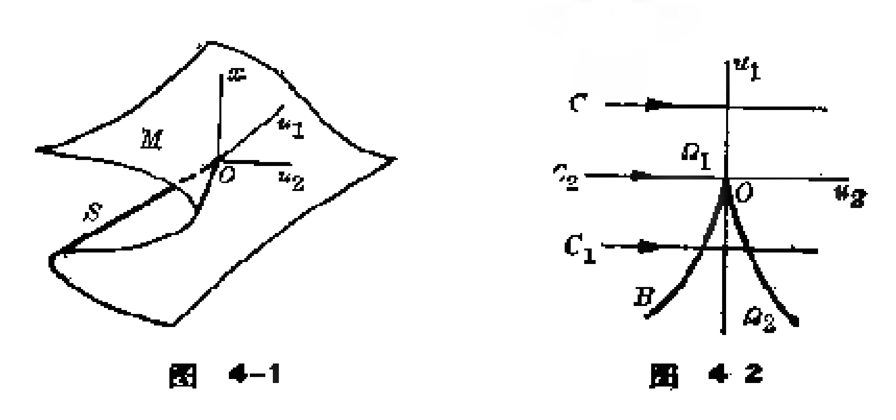


图 4-1　　　　图 4-2

这些点称为奇异点(或退化临界点)。它们的全体组成奇异点集 S。S 在控制变量(u_1, u_2)平面上的投影 B 称为分岔集。从方程(4.4)和(4.5)中消去 x,便得到集 B 的方程:

$$8u_1^3 - 27u_2^2 = 0. \tag{4.6}$$

这是一条半立方抛物线,常称为尖点曲线(见图 4-2)。它在点 O 处有一个尖点。分岔集 B 将(u_1, u_2)平面分成 Ω_1 和 Ω_2 两个区域。容易见到,在 Ω_1、B 或 Ω_2 上的控制变量数值分别对应一个、两个或三个临界点,从而梯度系统(4.1)在集 B 处出现平衡点分岔。在集 B 上,除了尖点 O 对应于余维数为 2 的分岔之外,其他地方都对应余维数为 1 的分岔(参看附录第 164 页)。

当控制变量沿着(u_1, u_2)平面上的曲线 c 变化时,由(4.3)可给出单参数的梯度系统。利用曲线 c 在平衡曲面 M 上对应的曲

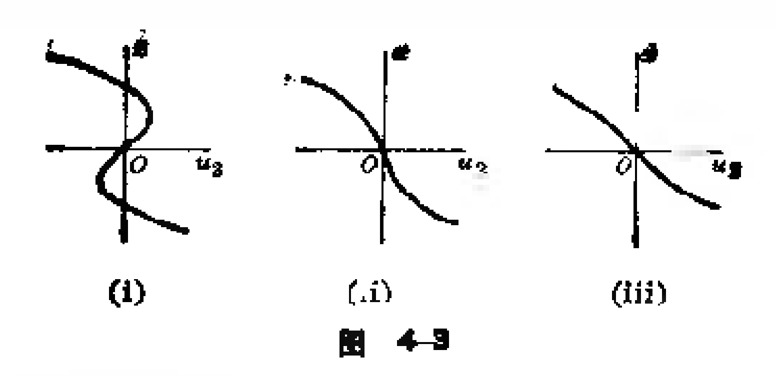


图 4-3

线，就可得到关于平衡点分岔的分岔图．例如，当(u_1, u_2)分别沿直线O_1、O_2、O_3变动时(见图4-2)，即u_1分别取负常数、零和正常数时，梯度系统(4.3)的平衡点分岔图分别见图4-3(i)、(ii)和(iii)．又如，当u_2分别取负常数、零和正常数时，平衡点分岔图分别见图4-4(i)、(ii)和(iii)．由此可见，对于初等突变，因为梯度向量场取决于势函数V，所以我们能够根据势函数本身去研究梯度系统的分岔问题．对于一般动力系统的平衡点分岔，就要利用映射的奇异性理论去研究(参看第3章)．

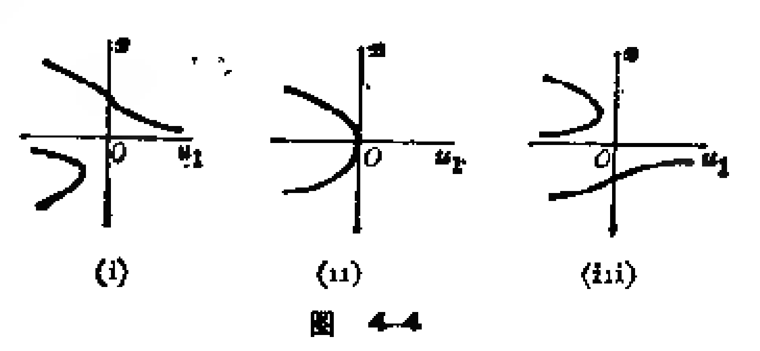


图 4-4

自组织(self organization)是非线性耗散系统复杂性的一种重要表现．普里高津的耗散结构理论[31]和哈肯(H. Haken)的协同学[43],[44]是自组织的物理原理．在开放和远离平衡的条件下，系统在与外界交换能量和物质的过程中可以通过能量耗散和内部的非线性动力学机制，形成和维持宏观时空有序结构，我们称之为耗散结构．协同学讨论由许多子系统组成的系统在形成有序结构时的协同作用和支配原理．这种不是依靠外界安排而是依靠系统内部协作自发产生有序结构的现象称为自组织．自组织现象的共同特征是非线性、非平衡性和不可逆性．在自组织过程中，最引人注

目的是非平衡跃迁现象，即任何一种新出现的有序结构都可以看作无序状态(例如空间均匀的定态)或其他有序状态失稳之后再按一定的机制建立的。然而，耗散结构的研究不能只限于一般原理的讨论；为了证实各种自组织现象的存在并揭示它们的行为，我们必须对具体系统分析失稳的条件和随后出现的跃迁过程。也就是说，对自组织过程的透彻了解必须同时借助非平衡态物理学和非线性动力学两方面的分析。因此，分岔、突变、混沌、分形几何和斑图动力学在自组织研究中起着十分重要的作用。

第 2 章

分岔理论的基本方法

§5 引 言

在分岔问题中，为了深入分析非线性动力系统的拓扑结构和稳定性变化规律，必须使用现代数学方法和计算手段。

目前，研究分岔的主要方法有：

1. 奇异性理论方法[8],[9],[26]

奇异性理论是现代数学的一个重要分支。它研究可微映射的退化性问题，并成功地处理许多非线性现象，如焦散面、张驰振动、激波、散射波等。奇异性理论始于惠特尼(H. Whitney)和摩尔斯(M. Morse)等人的工作，在60年代经托姆和阿尔诺特(B. И. Арнольд)等人全面奠定了基础。80年代以来，戈鲁比茨基(M. Golubitsky)等把奇异性理论系统地用于分岔研究，取得了显著的成果。在静态分岔问题中，奇异性理论严格地解决了"有限确定性"问题，从而静态分岔可用比较简单的戈鲁比茨基-沙弗(D. G. Schaeffer)范式进行识别和分类。我们还可以通过普适开折去研究在一般扰动下可能出现的所有分岔形态，并给出分岔转迁集等。在实际应用中，我们还可以从系统的大量参数中辨别出少数能反映结构稳定性本质的参数，这就便于从总体去认识系统的分岔性态和进行理论预测。奇异性理论方法不仅用于静态分岔，而且可以处理通有的和退化的霍普夫分岔等。因此它是一种研究平衡点分岔的统一且有效的方法。近年来这方法已受到广泛的重视。应当指出，对于高维系统，通常先用李雅普诺夫-施密特(E. Schmidt)约化方法进行降维，然后用奇异性理论方法研究约化系统的分岔。

2 庞卡莱 伯克霍夫范式方法[1]~[4],[45]

常微分方程的范式的概念，最早是由庞卡莱提出的。后来经过伯克霍夫(G. D. Birkhoff)、阿尔诺特等逐步发展，已成为较为完整的理论。在平衡点附近，我们用近似恒同的非线性变换将常微分方程化简，只保留共振项，便得到方程的PB范式。这种方法适用于研究局部分岔。对于高维系统，在使用PB范式方法之前，往往要先用中心流形方法降维。在实际问题中，应用PB范式进行分岔分析时，我们必须确定PB范式的具体形式。目前比较有效的方法有：矩阵法、共轭算子法、李代数法、S-N分解法、共振法等，有时还可以用计算机代数法在计算机上求出。此外，对称不变量理论也可用来计算PB范式。

3. 摄动法[5],[24],[37],[38]

利用投影法、平均法、多重尺度法、各种谐波平衡法、WKB法等，可确定分岔解的渐近展开式。这类方法比较简便，易于被只有古典分析数学基础的人接受和运用。它可以用于静态分岔，霍普夫分岔、次谐和超谐分岔、准周期分岔等一系列问题，并能给出近似的解析结果。

4. 后继函数法[25]**和什尔尼科夫法**[11]

这两种方法在研究二维和高维系统的周期轨线分岔和同、异宿分岔问题中有重要的理论价值。

5. 次谐梅尔尼科夫函数法[1]

它可以用来研究二维扰动哈密顿(W. R. Hamilton)系统的m/n阶次谐分岔问题。

6. 符号动力学方法[46],[47]

符号序列的研究可以追溯到19世纪中叶。本世纪二、三十年代，摩尔斯等人开始详细地讨论了符号动力学。直到80年代，人们才开始注意到符号动力学与实际系统动力学之间深刻的内在联系，使得实用符号动力学成为动力学研究的重要方法。符号动力学方法是根据符号序列的移位不变集去判断系统的分岔和混沌行

为，是一种严格的数学方法．但是，它有形象直观的特色，并可通过数值计算实现．目前符号动力学方法已成功地用于一维映射和某些常微分方程系统的分岔、混沌和吸引子特性研究．高维符号动力学方法也正在建立之中．

7．胞映射法[20]

胞映射法是近十多年来发展起来的．它把动力系统的研究转化为在相空间中胞映射性态的研究．它需要通过计算去实现，其基本理论不涉及过多的抽象数学．胞映射法的应用范围很广，尤其适用于动力系统的全局分析．因此，胞映射法是全局分岔、混沌、吸引子和动力系统瞬态研究的一种有效方法．

8．其他方法[18],[48],[49]

隐函数定理、变分方法、拓扑度法和康利（C. Conley）指标法等，都是无限维系统分岔研究的重要方法．

在上述理论分析方法中，除摄动法可得定量结果、符号动力学方法和胞映射法可得数值结果之外，其他方法皆属于定性研究．一般说来，由于非线性问题的复杂性，理论分析往往难以进行．因此直接进行数值计算和模拟就有十分重要的意义．分岔的数值计算包括稳定性条件的判别、分岔值的确定、分岔解的追踪等，现在已经有了一批有效的算法和软件系统[19],[34],[50]~[52]．不过，分岔的数值研究尚有许多问题需要解决．例如全局分岔和高余维分岔的计算、保守系统分岔计算、无限维系统的斑图动力学的数值模拟等．

自然界的系统往往有一定的对称性．对称性的自发破缺，是产生分岔的重要因素．根据对称性建立的等变分岔理论，可以大大简化对称系统的分岔分析．群论方法和等变奇异性理论方法在对称分岔研究中发挥着巨大的作用．

本章的其他部分将讨论约化方法（LS 方法和中心流形方法）和 PB 范式方法．至于奇异性理论方法，将在第 3 章介绍．

§6 LS约化方法

李雅普诺夫-施密特约化方法（下面简称 LS 方法）是将高维或无限维非线性方程化为低维方程的降维方法．它的基本思想如下：通过空间分解方法，把非线性方程分别投影到两个子空间上，得到两个方程；由隐函数定理，其中一个方程总是有唯一解的；把这个解代入另一个方程，得到一个较低维的方程，这就将原来的方程的求解问题得以简化．

考虑由 C^r（其中 $r\geqslant 1$）映射 $F:\mathscr{X}\times\mathbb{R}^m\to\mathscr{Y}$ 给出的方程

$$F(u,\ \mu)=0,\qquad u\in\mathscr{X},\ \mu\in\mathbb{R}^m \tag{6.1}$$

这里 $\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$ 是巴拿赫空间（当然可以是有限维的欧氏空间），$\mu=(\mu_1,\ \cdots,\ \mu_m)$ 是参数．设 $F(0,\ 0)=0$．记导算子 $D_uF(0,\ 0)=\mathfrak{L}$，其零空间为 $\mathscr{N}(\mathfrak{L})$，值域为 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})$．设 $\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 的维数有限，且大于 0，即 $\mathfrak{L}$ 有有限个零特征值†．

在许多实际问题中，$\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 和 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})$ 在空间 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 中分别有闭补 $\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}_0\subset\mathscr{Y}$．从而，有空间的直和分解：

$$\mathscr{X}=\mathscr{N}(\mathfrak{L})\oplus\mathscr{X}_0,\qquad \mathscr{Y}=\mathscr{Y}_0\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{L}). \tag{6.2}$$

特别地，当 $\mathfrak{L}$ 是弗雷德霍姆（T. Fredholm）算子††时，上述论断是成立的．

定义投影算子 $P:\mathscr{Y}\to\mathscr{R}(\mathfrak{L})$ 和补投影算子 $I-P:\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}_0$，其中 I 为恒等算子．于是，方程(6.1)等价于下面的方程组：

$$\begin{cases} PF(u,\ \mu)=0, & (6.3)\\ (I-P)F(u,\ \mu)=0. & (6.4)\end{cases}$$

---

† 由 § 9 知道，此时 $(0,\ 0)$ 是函数 $F(u,\ \mu)$ 的一个奇异点．

†† 如果有界线性算子 $\mathfrak{L}$ 的值域 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})$ 是闭子空间，且 $\dim\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 和 $\mathrm{codim}\,\mathscr{R}(\mathfrak{L})=\dim(Y/\mathscr{R}(\mathfrak{L}))$ 都有限，则称 $\mathfrak{L}$ 为弗雷德霍姆算子．$i(\mathfrak{L})=\dim\mathscr{N}(\mathfrak{L})-\mathrm{codim}\,\mathscr{R}(\mathfrak{L})$ 称为 $\mathfrak{L}$ 的指标．可以证明，对零指标的弗雷德霍姆算子 $\mathfrak{L}$，如果 $\dim\mathscr{N}(\mathfrak{L})=0$，则 $\mathfrak{L}$ 是可逆的．

根据直和分解(6.2)，对任何 $u\in\mathscr{X}$，有

$$u=v+w, \tag{6.5}$$

其中 $v\in\mathscr{N}(\mathfrak{L})$，$w\in\mathscr{X}_0$。于是，(6.3)可写成

$$\Phi(v,\ w,\ \mu)=PF(v+w,\ \mu)=0, \tag{6.6}$$

其中映射 $\Phi: \mathscr{N}(\mathfrak{L})\times\mathscr{X}_0\times\mathbb{R}^m\to\mathscr{R}(\mathfrak{L})$.

由 $F(0,\ \mathbf{0})=0$ 显然有 $\Phi(0,\ 0,\ \mathbf{0})=0$. 此外，考虑到

$$\begin{aligned}D_w\Phi(0,\ 0,\ \mathbf{0})&=PD_wF(v+w,\ \mu)|_{(0,0,0)}\\&=PD_uF(0,\ \mathbf{0})=P\mathfrak{L}=\mathfrak{L},\end{aligned}$$

且当 $\mathfrak{L}$ 限制在 $\mathscr{X}_0$ 上时，它是可逆的，从而导数 $D_w\Phi(0,\ 0,\ 0)$ 可逆. 由隐函数定理，方程(6.6)在 $(v,\ w,\ \mu)=(0,\ 0,\ \mathbf{0})$ 的某个邻域内存在唯一解 $w=W(v,\ \mu)$，并有 $W(0,\ \mathbf{0})=0$. 将这个解代入(6.4)，便得到方程

$$\Psi(v,\ \mu)=(I-P)F(v+W(v,\ \mu),\ \mu)=0. \tag{6.7}$$

其中映射 $\Psi: \mathscr{N}(\mathfrak{L})\times\mathbb{R}^m\to\mathscr{Y}_0$. 由于在 $(u,\ \mu)=(0,\ \mathbf{0})$ 附近，方程(6.1)和(6.7)的解有一一对应关系：

$$u=v+W(v,\ \mu), \tag{6.8}$$

故这两个方程的求解问题等价. 方程(6.7)称为原来的方程(6.1)的分岔方程(或约化方程). 显然，方程(6.7)的维数比(6.1)的维数低. 这种降维方法称为 **LS** 方法.

在应用中，为了求解和研究方程(6.7)，适当地选取子空间 $\mathscr{Y}_0$ 以及在 $\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 和 $\mathscr{Y}_0$ 中选取坐标是很重要的. 下面假设我们可在空间 $\mathscr{Y}$ 中定义内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，并取 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})$ 的正交补为 $\mathscr{Y}_0$，即

$$\mathscr{Y}_0=\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp=\{y\in\mathscr{Y}\,|\,\langle y,\ z\rangle=0,\ \forall z\in\mathscr{R}(\mathfrak{L})\},$$

从而 $\mathscr{Y}=\mathscr{R}(\mathfrak{L})\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp$. 此外，还设

$$\dim\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp=\dim\mathscr{N}(\mathfrak{L})=n. \tag{6.9}$$

例如，当 $\mathfrak{L}$ 是零指标弗雷德霍姆算子时，(6.9)就成立. 这时我们在 $\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 中取基底 $\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$ 和在 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp$ 中取基底 $\{v_1^*,\ \cdots,\ v_n^*\}$. 于是，任何 $v\in\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 可表示为

$$v=\sum_{j=1}^{n} x_j v_j, \tag{6.10}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. 把(6.10)代入分岔方程 (6.7)，并分别与 v_i^* 取内积($i=1,\cdots,n$)，便得到关于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 n 个方程：

$$g_i(\boldsymbol{x},\mu)=\left\langle v_i^*,\ F\left(\sum_{j=1}^{n}x_jv_j+W\left(\sum_{j=1}^{n}x_jv_j,\ \mu\right),\ \mu\right)\right\rangle=0,$$

$$i=1,\cdots,n \tag{6.11}$$

在上式推导中，用到了对任何 $y\in\mathscr{Y}$ 皆有 $Py\in\mathscr{R}(L)$，从而 $\langle v_i^*, Py\rangle=0$ 的结果(其中 $i=1,\cdots,n$)。显然，方程组(6.11)与方程(6.7)等价，因此(6.11)亦称为“分岔方程”。

应当注意到，虽然由 LS 方法得到的分岔方程的维数较低，但它的求解通常仍然很困难，甚至连分岔方程本身也难以明显写出。我们一般只能用逐次逼近法或摄动法求得分岔方程的近似解。因此，通过分岔分析去了解分岔方程解的定性性质是主要的研究途径。其中，奇异性理论是一种常用的方法(参看第 3 章)。

在用奇异性理论去讨论分岔方程 (6.11) 的静态分岔性态时，需要计算约化函数 g_i 的一些导数。但我们无需知道 g_i 的明显表达式，就可以利用原来的函数 F 的导数进行计算。具体结果如下。引入 F 在(u,μ)处的 k 阶微分($k\geqslant1$)：

$$D^kF(u,\mu)(\xi_1,\cdots,\xi_k)=\frac{\partial}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial}{\partial t_k}F\left(u+\sum_{i=1}^{k}t_i\xi_i,\ \mu\right)\bigg|_{t_1=\cdots=t_k=0}. \tag{6.12}$$

它是关于 k 个变量 $\xi_1,\cdots,\xi_k\in\mathscr{X}$ 的对称 k 线性函数。此外，记 $F_{\mu_i}=\partial F/\partial\mu_i$。下面列举 g_i 的一些导数公式，其中 g_i 的导数都是对$(\boldsymbol{x},\mu)=(0,0)$处取的，$F$ 的导数都是对$(u,\mu)=(0,0)$取的，不再详细标明；$i,\ j,\ k,\ l,\ s,\ t$ 等皆可取 $1,\cdots,n$。

(i) $\partial g_i/\partial x_j=0$.

(ii) $\partial^2 g_i/\partial x_j\partial x_k=\langle v_i^*,\ D^2F(v_j,\ v_k)\rangle$.

(iii) $\partial^3 g_i/\partial x_j\partial x_k\partial x_l=\langle v_i^*,\ V\rangle$,

其中 $V=D^3F(v_j, v_k, v_l)-D^2F(v_j, w_{lk})-D^2F(v_k, w_{lj})-D^2F(v_l, w_{kj})$，$w_{st}=\mathfrak{L}^{-1}PD^2F(v_s, v_t)$，$\mathfrak{L}^{-1}$：$\mathscr{R}(\mathfrak{L})\to\mathscr{X}_0$ 是 $\mathfrak{L}|_{\mathscr{X}_0}$ 的逆算子.

(iv) $\partial g_i/\partial\mu_j=\langle v_i^*, F_{\mu_j}\rangle$.

(v) $\partial^2 g_i/\partial x_j\partial\mu_k=\langle v_i^*, (DF_{\mu_k})\cdot v_j-D^2F(v_j, \mathfrak{L}^{-1}PF_{\mu_k})\rangle$.

上述公式都可以用隐函数微分法导出(参看 [8] 的第一章和第七章)。读者还可根据需要而自行推导更多的公式.

在计算上述导数时，主要的困难是求逆算子 $\mathfrak{L}^{-1}$. 但有两种情形可以避免或减轻这个困难：

1. 设 F 是 u 的奇函数，即 $F(-u, \mu)=-F(u, \mu)$. 这时在 $(u, \mu)=(0, \mu)$ 处有 $F_{\mu_i}=0$, $D^2F=0$，从而(ii)和(iv)式给出

$$\partial^2 g_i/\partial x_k\partial x_l=0, \qquad \partial g_i/\partial\mu_j=0;$$

(iii)和(v)式分别给出

$$\partial^3 g_i/\partial x_j\partial x_k\partial x_l=\langle v_i^*, D^3F(v_j, v_k, v_l)\rangle,$$
$$\partial^2 g_i/\partial x_j\partial\mu_k=\langle v_i^*, (DF_{\mu_k})\cdot v_j\rangle.$$

2. 设对一切 μ 有 $F(0, \mu)=0$. 这时，在 $(u, \mu)=(0, \mu)$ 处有 $F_{\mu_j}=0$，因此(iv)和(v)式分别给出

$$\partial g_i/\partial\mu_j=0, \qquad \partial^2 g_i/\partial x_j\partial\mu_k=\langle v_i^*, (DF_{\mu_k})\cdot v_j\rangle.$$

最后，简单讨论稳定性与 LS 约化的关系. 考虑 $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$ 的情形. (6.1) 可看作动态方程

$$\dot{u}+F(u, \mu)=0 \qquad u\in\mathscr{X}, \ \mu\in\mathbb{R}^m \quad (6.13)$$

的平衡解方程. 设导算子 $\mathfrak{L}$ 的谱中，除一个零特征值外，其余谱点的实部都大于 0. 此时 $\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 和 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp$ 都是一维的，分别取它们的基向量 v_0 和 v_0^*，使得 $\langle v_0, v_0^*\rangle>0$. 通过 LS 约化，得到一维的分岔方程

$$g(x, \mu)=0, \qquad x\in\mathbb{R} \quad (6.14)$$

当 $\mu=0$ 时，(6.1)有解 $u=0$. 由于 $\mathfrak{L}$ 有零特征值，在(0, 0)处会出现静态分岔. 如果在 $\mu\neq 0$ 时(6.1)有 s 个解 $(u_i(\mu), \mu)$ $(i=1, \cdots, s)$，它们分别对应分岔方程的解 $(x_i(\mu), \mu)$. 我们考虑当 $\mu\neq 0$ 时

(u_i, μ)作为方程(6.13)的平衡解的稳定性. 可以证明[8], 若$g_x(x_i, \mu)>0$, 则(u_i, μ)是(在李雅普诺夫意义下)渐近稳定的; 若$g_x(x_i, \mu)<0$, 则(u_i, μ)是不稳定的.

下面给出两个用 LS 方法进行约化的例子.

[例 1] 考虑由 $F(\boldsymbol{x}, \mu)=(\mu x_1+x_2-x_1^2, -x_2-x_1^2)^T$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)^T\in\mathbb{R}^2$, 参数$\mu\in\mathbb{R}$)给出的二维方程

$$F(\boldsymbol{x}, \mu)=\mathbf{0}. \tag{6.15}$$

显然, 有 $F(\mathbf{0}, 0)=\mathbf{0}$. 此外, F 在$(\mathbf{0}, 0)$处的导算子矩阵

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}_x F(\mathbf{0}, 0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

有特征值 0 和-1. 易见, $\boldsymbol{L}$ 的零空间和值域为

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{N}(\boldsymbol{L})=\{(x_1, x_2)\,|\,x_2=0\},$$

$$\mathscr{E}_2=\mathscr{R}(\boldsymbol{L})=\{(x_1, x_2)\,|\,x_1=0\}.$$

在空间 $\mathscr{X}=\mathscr{Y}=\mathbb{R}^2$ 中引入内积

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle=\sum_{i=1}^{2}x_i y_i, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$$

显然 $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1^{\perp}$, 从而 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 有同样的正交分解:

$$\mathscr{X}=\mathscr{Y}=\mathscr{E}_1\oplus\mathscr{E}_2.$$

在 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 上分别取单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1, 0)^T$ 和 $\boldsymbol{e}_2=(0, 1)^T$. 从 $\mathscr{Y}=\mathbb{R}^2$ 到 $\mathscr{E}_2=\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$的正交投影算子 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{y}}=\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{y}\rangle \boldsymbol{e}_2, \qquad \forall \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$$

接着, 我们在 $(\mathbf{0}, 0)$ 附近用 LS 方法建立分岔方程. 任何 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{X}$ 都可写成

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \tag{6.16}$$

其中 $\boldsymbol{v}=x_1\boldsymbol{e}_1\in\mathscr{E}_1$, $\boldsymbol{w}=x_2\boldsymbol{e}_2\in\mathscr{E}_2$. 于是, 在 $\mathscr{E}_2=\mathscr{R}(\boldsymbol{L})$ 上的投影方程(即方程(6.6))可写成

$$\langle \boldsymbol{e}_2, F(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \mu)\rangle=-x_2-x_1^2=0.$$

由此解出 $x_2=-x_1^2$, 从而

$$\boldsymbol{w}=x_2\boldsymbol{e}_2=-x_1^2\boldsymbol{e}_2, \tag{6.17}$$

把上式代入在 $\mathscr{S}_1=\mathscr{R}(L)^{\perp}$ 上的投影方程(即方程(6.7)),并与 e_1 作内积,便得到一维的分岔方程(即方程(6.11)):

$$g(x_1, \mu)\equiv\langle e_1, F(v+w, \mu)\rangle$$
$$=\mu x_1-2x_1^2=0. \tag{6.18}$$

分岔方程(6.18)有两个解:

$$x_1=0 \quad 和 \quad x_1=\mu/2. \tag{6.19}$$

易知,在 $\mu=0$ 处出现跨临界分岔(见图6-1). 由 $v=x_1e_1$ 和(6.16)、(6.17)、(6.19),可以得到原来的方程(6.15)的两个解:

$$x^{(1)}(\mu)=(0, 0)^T,$$
$$x^{(2)}(\mu)=(\mu/2, -\mu^2/4)^T.$$

图 6-1

它们也在 $\mu=0$ 处出现跨临界分岔. 由此可见,原来方程的分岔性态完全可以用分岔方程描述.

[例2] 考虑§3中压杆屈曲问题引进的非线性方程(见(3.4),这里取杆长 $l=\pi$):

$$F(u, \mu)=-u''-\mu\sin u=0, \ (u, \mu)\in\mathscr{X}\times\mathbb{R} \tag{6.20}$$

其中 μ 是参数,映射 $F: \mathscr{X}\times\mathbb{R}\to\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 分别是巴拿赫空间:

$$\mathscr{X}=\{u\in C^2[0, \pi] \mid u'(0)=u'(\pi)=0\}, \quad \mathscr{Y}=C^0[0, \pi].$$

显然,(6.20)对任何 μ 有平凡解 $u=0$, 即 $F(0, \mu)\equiv0$. F 在 $(0, \mu)$ 处的导算子 $D_uF(0, \mu): \mathscr{X}\times\mathbb{R}\to\mathscr{Y}$ 由下式给出:

$$D_uF(0, \mu)=-d^2/ds^2-\mu. \tag{6.21}$$

考虑线性化方程

$$D_uF(0, \mu)v\equiv-v''-\mu v=0, \qquad v\in\mathscr{X} \tag{6.22}$$

即 v 应满足边界条件 $v'(0)=v'(\pi)=0$. 容易见到,(6.22)只有当

$$\mu=\mu_n\equiv n^2 \qquad n=1, 2, \cdots \tag{6.23}$$

时,才有非平凡解

$$v=C\cos ns, \qquad n=1, 2, \cdots \tag{6.24}$$

其中 C 为任意常数. 这表明当 $\mu=\mu_n$(其中 $n=1, 2, \cdots$)时, $D_u(0, \mu_n)$ 有由 $v_n=\cos ns$ 张成的一维零空间; 而当 $\mu\neq\mu_n$ 时,

$D_u(0, \mu)$的零空间的维数为0。

现在我们只讨论$\mu=\mu_1=1$的情形，并用LS方法将方程(6.20)在(0, 1)附近进行约化。记$\mathfrak{L}=D_uF(0, 1)$，它有由$v_1=\cos s$张成的一维零空间

$$\mathscr{N}(\mathfrak{L})=\text{span}\{v_1\}. \tag{6.25}$$

在空间$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$中定义内积：

$$\langle u, v\rangle=\int_0^\pi u(\xi)v(\xi)d\xi. \tag{6.26}$$

$\mathfrak{L}: \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$是零指标的弗雷德霍姆算子(参看[8]的第七章§2)，故我们可取空间的正交分解：

$$\mathscr{X}=\mathscr{N}(\mathfrak{L})\oplus\mathscr{X}_0, \quad \mathscr{Y}=\mathscr{Y}_0\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{L}), \tag{6.27}$$

其中
$$\mathscr{X}_0=\mathscr{N}(\mathfrak{L})^\perp=\{u\in X \mid \langle u, v_1\rangle=0\},$$
$$\mathscr{Y}_0=\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp=\{u\in Y \mid \langle u, h\rangle=0, \forall h\in\mathscr{R}(\mathfrak{L})\}.$$

容易证明$\mathfrak{L}$是$\mathscr{X}$上的自伴算子。事实上，利用分部积分和边界条件，可以证明

$$\langle\mathfrak{L}u, v\rangle=\langle u, \mathfrak{L}v\rangle, \qquad \forall u, v\in\mathscr{X}$$

此即表明$\mathfrak{L}$的伴随算子$\mathfrak{L}^*=\mathfrak{L}$。根据弗雷德霍姆择一性定理，便得到

$$\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp=\mathscr{N}(\mathfrak{L}^*)=\mathscr{N}(\mathfrak{L}). \tag{6.28}$$

我们可取v_1作为子空间$\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp$的基底。记$P$和$Q$分别为由$\mathscr{Y}$到$R(\mathfrak{L})$和$\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp$的正交投影算子，于是对$u\in\mathscr{Y}$有

$$Qu=\langle u, v_1\rangle v_1/\langle v_1, v_1\rangle$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi u(\xi)\cos\xi d\xi\right)\cos s, \tag{6.29}$$

$$Pu=(I-Q)u$$
$$=u(s)-\frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi u(\xi)\cos\xi d\xi\right)\cos s. \tag{6.30}$$

利用上面的结果，并将任何$u\in\mathscr{X}$写成

$$u=v+w, \qquad v\in\mathscr{N}(\mathfrak{L}), w\in\mathscr{X}_0 \tag{6.31}$$

我们得到在$\mathscr{R}(\mathfrak{L})$和$\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp=\mathscr{N}(\mathfrak{L})$上的投影方程

$$\begin{cases} PF(v+w,\ \mu)=0, & (6.32) \\ QF(v+w,\ \mu)=0. & (6.33) \end{cases}$$

从前面知道，(6.32) 有唯一解 $w=W(v,\ \mu)$. 把它代入(6.33)，并将 $v\in\mathcal{N}(\Omega)$表示成 $v=xv_1$，便得到一维的分岔方程：(见(6.11))

$$g(x,\ \mu)=\langle v_1,\ F(xv_1+W(xv_1,\ \mu),\mu)\rangle=0,$$

$$x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R} \quad (6.34)$$

若记 $\overline{W}(s,\ \mu)=W(x\cos s,\ \mu)$，则(6.34)可写成

$$g(x,\ \mu)=\int_0^{\pi}[\overline{W}''(\xi,\ \mu)-\mu\sin(x\cos\xi$$

$$+\overline{W}(\xi,\ \mu))]\cos\xi d\xi-\frac{\pi}{2}x=0. \quad (6.35)$$

然而，由于我们无法得出 $\overline{W}(s,\ \mu)$的明显表达式，分岔方程(6.35)也就难以具体写出和求解。§10 中将用奇异性理论方法对(6.35)进行分岔的定性分析。

§7 中心流形方法

中心流形方法是动力系统理论的一个重要内容，它也是一种主要的降维方法。这里只介绍有限维空间 $\mathbb{R}^n$ 的向量场的中心流形方法。考虑由 C^r(其中 $r\geq 1$)向量场 $f: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 给出的动力系统

$$\dot{x}=f(x), \qquad x\in U\subseteq\mathbb{R}^n \quad (7.1)$$

其中 U 是包含原点 O 的开集。设点 O 是(7.1)的一个非双曲平衡点，即导算子 $Df(0)$ 有实部为 0 的特征值。记 $Df(0)$ 的特征值集 $\sigma=\sigma^s\cup\sigma^u\cup\sigma^c$，$\sigma^s$、$\sigma^u$ 和 σ^c 分别为实部小于 0、大于 0 和等于 0 的特征值子集，它们在 $\mathbb{R}^n$ 中对应的特征子空间分别为 $\mathscr{E}^s$，$\mathscr{E}^u$ 和 $\mathscr{E}^c$。由中心流形定理(见附录第 158 页)可知，系统(7.1)在原点的某邻域内存在过原点且在该处分别与 $\mathscr{E}^s$、$\mathscr{E}^u$ 和 $\mathscr{E}^c$ 相切的局部稳定流形 W^s、局部不稳定流形 W^u 和局部中心流形 W^c(以后，为简单起见，略去"局部"两字，它们都是局部不变流形。系统(7.1)

在中心流形上的流的性态，对了解原系统的动力学特性有十分重要的意义。

下面只讨论 $Df(\mathbf{0})$ 的特征值无正实部的情形。这是在物理和工程技术上最感兴趣的。此时，$\sigma=\sigma^s\cup\sigma^c$，不稳定流形 W^u 不存在。记 $k=\dim\mathscr{E}^c$，$l=\dim\mathscr{E}^s=n-k$，令 $\mathbb{R}^n=\mathscr{E}^c\times\mathscr{E}^s$，并将 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 写成 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$，$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^k$，$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^l$。于是(7.1)（或通过适当的非奇异线性变换）可表示成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+g_1(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}),\\ \dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}+g_2(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}),\end{cases}\qquad (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})\in U\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l \tag{7.2}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 k 阶和 l 阶矩阵，它们分别有零实部和负实部的特征值；函数 g_1、g_2 及其一阶偏导数在原点处为 0。

中心流形 W^c 在原点附近用函数

$$\boldsymbol{v}=h(\boldsymbol{u})$$

表示。将上式代入(7.2)的第一式，便得到约化方程

$$\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+g_1(\boldsymbol{u},\ h(\boldsymbol{u})),\qquad \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^k \tag{7.3}$$

这给出中心流形 W^c 上的向量场在中心子空间 $\mathscr{E}^c$ 上的投影（见图 7-1），从而确定中心流形上的流。由于在原点附近，系统(7.2)在稳定流形上的流有着与线性收缩流相同的局部性态，系统(7.2)的局部动力学性态就主要由中心流形上的流决定。特别地，关于稳定性有下面的定理：

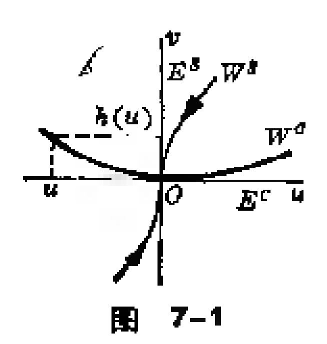


图 7-1

定理 如果约化系统(7.3)的原点是稳定（或渐近稳定、不稳定）的，则原系统(7.2)的原点也是稳定（或渐近稳定、不稳定）的。

接着考虑中心流形的计算问题，即确定函数 $h(\boldsymbol{u})$。将 $\boldsymbol{v}=h(\boldsymbol{u})$ 代入(7.2)的第二式，并利用求导的链式法则，有

$$Dh(\boldsymbol{u})\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{B}h(\boldsymbol{u})+g_2(\boldsymbol{u},\ h(\boldsymbol{u}))\text{.}$$

再用(7.2)的第一式，整理后，便得到 $h(\boldsymbol{u})$ 的微分方程：

$$Dh(\boldsymbol{u})[A\boldsymbol{u}+g_1(\boldsymbol{u},\ h(\boldsymbol{u}))]-Bh(\boldsymbol{u})-g_2(\boldsymbol{u},\ h(\boldsymbol{u}))=\boldsymbol{0}. \tag{7.4}$$

此外，考虑到 W^c 经过原点，且在该处与 $\mathscr{E}^c$ 相切，因此 $h(\boldsymbol{u})$ 应满足条件：

$$h(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\quad Dh(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}. \tag{7.5}$$

应当注意，h 的方程 (7.4) 一般是不能精确求解的，通常只能求渐近级数解。

［例 1］　考虑系统

$$\dot{x}=xy,\qquad \dot{y}=-y+\alpha x^2,\qquad (x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \tag{7.6}$$

其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为常数．(7.6) 的向量场在原点处的导算子有特征值 0 和 -1，相应的特征子空间（即 $\mathscr{E}^c$ 和 $\mathscr{E}^s$）分别为 x 轴和 y 轴．根据中心流形定理，过原点有一维的中心流形和稳定流形．由 (7.4) 和 (7.5) 得知，中心流形函数 $y=h(x)$ 应满足

$$\begin{cases} h'(x)[xh(x)]+h(x)-\alpha x^2=0, \\ h(0)=h'(0)=0. \end{cases} \tag{7.7}$$

由 (7.7) 的第二式，可设 $h(x)$ 的渐近展开式为

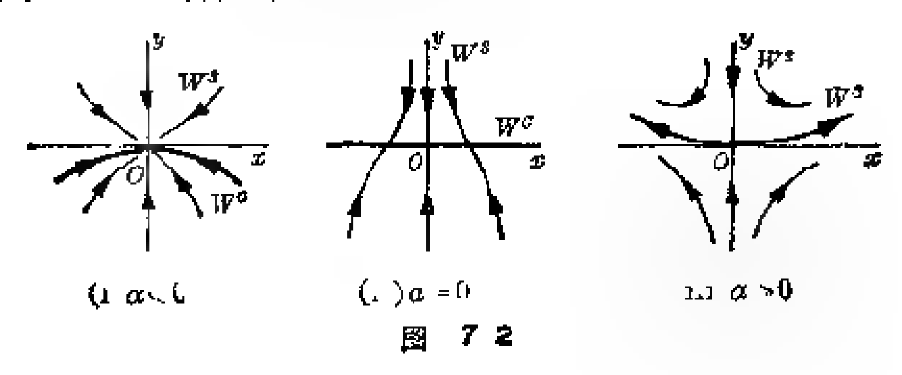
$$h(x)=c_2x^2+c_3x^3+O(x^4). \tag{7.8}$$

代入 (7.7) 的第一式，并比较 x 的同次幂的系数，可得 $c_2=\alpha$，$c_3=0$．故 $h(x)=\alpha x^2+O(x^4)$．

于是，在中心流形上的流的方程为（即 (7.3)）

$$\dot{x}=xh(x)=\alpha x^3+O(x^5). \tag{7.9}$$

易知，当 $\alpha<0$ 时，(7.9) 的原点是渐近稳定的．由前面的定理，可知原系统 (7.6) 的原点也是渐近稳定的．同理，当 $\alpha>0$ 时，(7.6)



(a) $\alpha<0$　　(b) $\alpha=0$　　(c) $\alpha>0$

图 7.2

的原点是不稳定的. 当 $\alpha=0$ 时，方程(7.7)有解 $h(x)=0$，这时中心流形就是 x 轴. 方程(7.9)成为 $\dot{x}=0$，它在原点处是稳定的，因此(7.6)的原点也是稳定的. 图7.2给出在原点附近的相图.

在研究分岔问题时，我们要考虑含参数的系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\quad \boldsymbol{x}\in U\subseteq\mathbb{R}^n,\quad \boldsymbol{\mu}\in J\subseteq\mathbb{R}^m \tag{7.10}$$

其中原点 $(\mathbf{0},\mathbf{0})\in U\times J$，$\boldsymbol{\mu}$ 是分岔参数. 设当 $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$ 时，(7.10)有非双曲平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 记导算子 $\Omega=D_x f(\mathbf{0},\mathbf{0})$. 与上面一样，设 Ω 的特征值没有正实部，其中有 k 个的实部等于0，其余 $n-k$ 个有负实部. 根据上面对 Ω 所作的假设，并把 $\boldsymbol{\mu}$ 也看作变量，(7.10)可写成等价的形式：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{u}+g_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}),\\ \dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{v}+g_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu}),\\ \dot{\boldsymbol{\mu}}=\mathbf{0},\end{cases} \tag{7.11}$$

其中 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^m$；$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mu})$ 和 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\mu})$ 分别为 k 阶和 $n-k$ 阶矩阵，它们当 $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}$ 时分别有零实部和负实部的特征值；函数 g_1、g_2 及其一阶偏导数在(0, 0, 0)处等于0. (7.11)称为(7.10)的"扩张系统".

显然，$(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$ 是扩张系统(7.11)的一个非双曲平衡点. 根据中心流形定理，(7.11)在 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\mu})$ 空间 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^m$ 中有一个 $k+m$ 维中心流形，它在原点处与 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu})$ 空间相切. 我们可以通过该中心流形上平衡点的分岔，去描述原系统(7.10)的平衡点分岔情况.

[例2] 考虑含参数系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\mu x-y-x^2.\end{cases}\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{7.12}$$

当 $\mu=0$ 时，(7.12)在平衡点(0, 0)处的导算子的特征值为0和-1，故原点是一个非双曲平衡点. 为便于研究起见，作变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

并将参数 μ 也看作变量，得到扩张系统

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu(u+v) - (u+v)^2, \\ \dot{\mu} = 0, \\ \dot{v} = -\mu(u+v) - v + (u+v)^2. \end{cases} \tag{7.14}$$

(7.14)有一个二维的中心流形，它在(0, 0, 0)处与(u, μ)平面相切。若中心流形由函数 $v=h(u, \mu)$ 表示，则由(7.4)得到 h 的方程

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial \mu}\right)\begin{pmatrix} \mu(u+h) - (u+h)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu(u+h)$$
$$+h-(u+h)^2 = 0,$$

即

$$[\mu(u+h) - (u+h)^2]\left(\frac{\partial h}{\partial u} + 1\right) + h = 0. \tag{7.15}$$

条件(7.5)给出

$$h(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial h(0, 0)}{\partial u} = \frac{\partial h(0, 0)}{\partial \mu} = 0. \tag{7.16}$$

由(7.15)和(7.16)，可求出中心流形的渐近展开式

$$v = h(u, \mu) = -\mu u + u^2 + O((u^2+\mu^2)^{3/2}). \tag{7.17}$$

由(7.14)得到在中心流形上的约化系统：

$$\begin{cases} \dot{u} = \mu u - u^2 + O((u^2+\mu^2)^{3/2}), \\ \dot{\mu} = 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

图 7-3 给出约化系统(7.18)的分岔图。显然，在$(u, \mu) = (0, 0)$处出现平衡点的跨临界分岔，$\mu=0$ 是一个静态分岔值。图 7-4 给出原系统(7.12)的分岔图，可见原系统亦在$\mu=0$处出现平衡点的跨临界分岔。

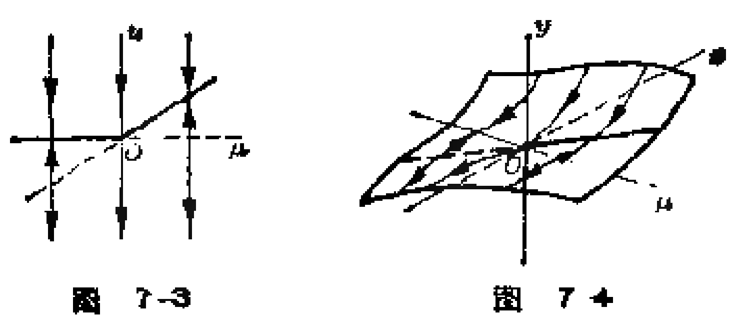


图 7-3　　　　图 7-4

§8 PB范式方法

在微分方程研究中，往往可以通过适当的变换把方程化为较简单的形式。庞卡莱-伯克霍夫范式（以后简称PB范式）是在平衡点附近利用坐标变换把常微分方程化简的一种重要方法。它不但用于常微分方程的一般定性研究，而且是研究常微分方程的分岔（尤其是动态分岔）的基本工具。

§8.1 PB范式的概念

考虑非线性微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \tag{8.1}$$

设$f(\boldsymbol{x})$足够光滑，且$f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$。假设向量场$f(\boldsymbol{y})$在平衡点$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$附近有泰勒展开式

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+f_2(\boldsymbol{x})+\cdots+f_k(\boldsymbol{x})+O(\|\boldsymbol{x}\|^{k+1}), \tag{8.2}$$

其中$\boldsymbol{A}=Df(\boldsymbol{0})$，$f_j\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$（这里$j=2,\cdots,k$），$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$是从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的全部$j$次齐次多项式映射组成的有限维线性空间。PB范式理论的基本思想是通过一系列接近于恒同的变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+p(\boldsymbol{y})$（这里$p(\boldsymbol{y})=O(\|\boldsymbol{y}\|^2)$）把(8.1)化为较简单的形式。这个化简过程是对向量场由低次项到高次项逐步实现的，其中每个步骤的做法都是类似的。

先作变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+p_2(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \tag{8.3}$$

其中$p_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)$是待定函数。把(8.3)代入(8.1)，得到

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{y}}=&[\boldsymbol{I}+Dp_2(\boldsymbol{y})]^{-1}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}+p_2(\boldsymbol{y}))+f_2(\boldsymbol{y}+p_2(\boldsymbol{y}))\\&+\cdots+f_k(\boldsymbol{y}+p_2(\boldsymbol{y}))+O(\|\boldsymbol{y}\|^{k+1})],\end{aligned} \tag{8.4}$$

这里$\boldsymbol{I}$为$n\times n$单位矩阵。注意到

$$[\boldsymbol{I}+Dp_2(\boldsymbol{y})]^{-1}=\boldsymbol{I}-Dp_2(\boldsymbol{y})+O(\|\boldsymbol{y}\|^2),$$

于是，(8.4)化为

$$\begin{aligned}\dot{y}&=Ay+f_2(y)+[Ap_2(y)-Dp_2(y)Ay]\\&\quad+\tilde{f}_3(y)+\cdots+\tilde{f}_k(y)+O(\|y\|^{k+1})\\&=Ay+f_2(y)-\mathfrak{L}_A^{(2)}p_2(y)+\tilde{f}_3(y)+\cdots\\&\quad+\tilde{f}_k(y)+O(\|y\|^{k+1}),\end{aligned}\tag{8.5}$$

其中$\tilde{f}_j\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$(这里$j=3,\cdots,k$)，线性算子$\mathfrak{L}_A^{(2)}:\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)$由下式定义：

$$\mathfrak{L}_A^{(2)}p(y)=[Dp(y)]\cdot Ay-Ap(y),\quad p\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)\tag{8.6}$$

它把二次齐次多项式仍变为二次齐次多项式，因此值域$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(2)})\subset\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)$。若取$\mathscr{G}_2$为$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(2)})$在$\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)$中的补空间，即$\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)=\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(2)})\oplus\mathscr{G}_2$，则$f_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)$可分解为

$$f_2(y)=h_2(y)+g_2(y),\quad h_2\in\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(2)}),\ g_2\in\mathscr{G}_2\tag{8.7}$$

于是，存在$p_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^n)$，使$\mathfrak{L}_A^{(2)}p_2(y)=h_2(y)$。因此，(8.5)成为

$$\dot{y}=Ay+g_2(y)+\tilde{f}_3(y)+\cdots+\tilde{f}_k(y)+O(\|y^{k+1}\|).\tag{8.8}$$

这就使向量场展开式的二次项得到简化。

一般地，我们定义线性算子$\mathfrak{L}_A^{(j)}:\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$如下：(这里$j=2,3,\cdots$)

$$\mathfrak{L}_A^{(j)}p(y)=[Dp(y)]\cdot Ay-Ap(y).\quad p\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)\tag{8.9}$$

它把j次齐次多项式仍变为j次齐次多项式，故

$$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(j)})\subset\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n).$$

取$\mathscr{G}_j$为$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(j)})$在$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$中的补空间，即$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)=\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(j)})\oplus\mathscr{G}_j$(这里$j=2,3,\cdots$)。利用与上面类似的方法，可以逐步将向量场展开式的高次项化简。一般地说，设经过i步($2\leqslant i\leqslant k-1$)后，方程(8.1)已变成

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+g_2(x)+\cdots+g_i(x)+\tilde{f}_{i+1}(x)\\&\quad+\cdots+\tilde{f}_k(x)+O(\|x\|^{k+1}),\end{aligned}\tag{8.10}$$

其中$g_l\in\mathscr{G}_l$(这里$l=2,\cdots,i$)，$\tilde{f}_m\in\mathscr{H}_m(\mathbb{R}^n)$(这里$m=i+1,\cdots,k$)。作变换

$$x=y+p_{i+1}(y),\quad y\in\mathbb{R}^n,\ p_{i+1}\in\mathscr{H}_{i+1}(\mathbb{R}^n)\tag{8.11}$$

于是，经过整理后，(8.10)成为

$$\dot{y}=Ay+g_2(y)+\cdots+g_i(y)+\tilde{f}_{i+1}(y)-\mathfrak{L}_A^{(i+1)}p_{i+1}(y)$$
$$+\hat{f}_{i+2}(y)+\cdots+\hat{f}_k(y)+O(\|y\|^{k+1}), \tag{8.12}$$
其中$\hat{f}_m\in\mathscr{H}_m(\mathbb{R}^n)$（这里$m=i+2, \cdots, k$）．将$\tilde{f}_{i+1}\in\mathscr{H}_{i+1}(\mathbb{R}^n)$分解为

$$\tilde{f}_{i+1}(y)=h_{i+1}(y)+g_{i+1}(y),$$
$$h_{i+1}\in\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(i+1)}),\ g_{i+1}\in\mathscr{G}_{i+1} \tag{8.13}$$
若取$p_{i+1}\in\mathscr{H}_{i+1}(\mathbb{R}^n)$，使$\mathfrak{L}_A^{(i+1)}p_{i+1}(y)=h_{i+1}(y)$，则(8.12)成为

$$\dot{y}=Ay+g_2(y)+\cdots+g_{i+1}(y)+\hat{f}_{i+2}(y)$$
$$+\cdots+\hat{f}_k(y)+O(\|y\|^{k+1}). \tag{8.14}$$
从而，向量场展开式的$i+1$次项得以化简．由此可见，经过$k-1$步形如(8.11)的变换后，就可以把(8.1)化为下面的较简单的形式：

$$\dot{y}=Ay+g_2(y)+\cdots+g_k(y)+O(\|y\|^{k+1}), \tag{8.15}$$
其中$g_j\in\mathscr{H}_j$（这里$j=2, \cdots, k$）．我们把(8.15)称为原方程(8.1)的“k阶PB范式”．通常也可称截断式

$$\dot{y}=Ay+g_2(y)+\cdots+g_k(y) \tag{8.16}$$
为“k阶（截断）PB范式”．

在微分方程的PB范式中，每一项g_j（这里$j=2,\cdots,k$）都属于$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^j)$在$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$中的补空间$\mathscr{G}_j$．空间$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$的维数等于$nC_{n+j-1}^{n-1}$，它随$n$和$k$的增大而迅速增大，因此，向量场展开式(8.2)一般十分复杂．然而，子空间$\mathscr{G}_j$的维数通常要比$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$小得多．于是，在把方程变换成PB范式后，向量场展开式的项数可以大大减少，从而便于进行定性研究．

应当注意，由于补空间$\mathscr{G}_j$可以有不同的取法（这里$j=2, \cdots, k$），这样，对给定的阶数k来说，PB范式的取法一般不是唯一的．此外，在平衡点$x=0$附近，k阶截断范式(8.16)与原系统(8.1)的拓扑结构虽然有密切关系，但不一定完全相同．它们之间究竟相近到多大程度，仍是个未解决的问题．我们还注意到，(8.15)给出的是向量场的渐近展开式，它当$k\to\infty$时不必是收敛的．即使$f(x)$

是解析的情况下，(8.15)当 $k\to\infty$ 时也不一定收敛。尽管如此，大量研究表明，阶数不太高的PB范式通常就能提供定性研究的主要信息，因此它是研究平衡点附近的动力学性质的重要工具。

下面介绍PB范式的一些计算方法。以后还要对PB范式的计算和应用作进一步讨论。

§8.2 PB范式的计算

PB范式计算的关键，在于确定 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(j)})$ 在 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 中的补空间 $\mathscr{G}_j$。为此，先作一些说明。

考虑方程(8.1)。设导算子矩阵 A 有特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$（其中包括重根）。若存在一组非负整数 $\boldsymbol{m}=(m_1, \cdots, m_n)$ 满足 $|\boldsymbol{m}|=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\geqslant 2$，且对某个 λ_s（这里 $1\leqslant s\leqslant n$），有

$$\lambda_s=\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i, \tag{8.17}$$

则称特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为"共振"的。(8.17)称为"共振关系式"，$|\boldsymbol{m}|$ 称为"共振的阶"。若对某个 $j\geqslant 2$，任何满足 $|\boldsymbol{m}|=j$ 的 $\boldsymbol{m}=(m_1, \cdots, m_n)(m_i\geqslant 0)$ 都有

$$\lambda_s\neq\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i, \qquad s=1, \cdots, n \tag{8.18}$$

则称 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为"j 阶非共振的"。若(8.18)对一切 $j\geqslant 2$ 成立，则称 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为"非共振的"。这里讨论一下PB范式与共振的关系。

引理 线性算子 $\mathfrak{L}_A^{(j)}: \mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$（这里 $j\geqslant 2$）的特征值集合为 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\lambda_i-\lambda_s \,\middle|\, m_i\geqslant 0,\ |\boldsymbol{m}|=j,\ 1\leqslant s\leqslant n\right\}$。

引理的证明可参看[3]的§22。

根据上引理，如果 A 的特征值是 j 阶非共振的，则 $\mathfrak{L}_A^{(j)}$ 的特征值都不等于0，从而 $\mathfrak{L}_A^{(j)}$ 在 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 上是可逆的。也就是说，对任何 $h_j\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$，方程 $\mathfrak{L}_A^{(j)}p=h_j$ 总是可解的，且解 $p\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$。

因此 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(j)})=\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$，其补空间 $\mathscr{G}_j=\{0\}$. 于是，在 PB 范式中有 $g_j=0$，即不存在 j 次齐次多项式. 特别地，如果 A 的特征值为非共振的，则对一切 $j\geqslant 2$ 有 $\mathscr{G}_j=\{0\}$，从而 $g_j=0$. 这时，通过逐次的形如

$$x=y+p_j(y) \qquad p_j\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n),\ j=2,\cdots,k \tag{8.19}$$

的变换，可把方程(8.1)化成下面的 PB 范式

$$\dot{y}=Ay+O(\|y\|^{k+1}). \tag{8.20}$$

如果略去(8.20)中的高次项，就有线性方程

$$\dot{y}=Ay. \tag{8.21}$$

这表明在非共振的情况下，原来的非线性方程(8.1)通过一系列的近似恒同的非线性变换，可以在一定的精度要求下线性化.

由此可见，只有在 A 的特征值 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ 共振的情况下，方程(8.1)的 PB 范式才会保留一些非线性项. 在 PB 范式计算中，我们需要知道 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^{(j)})\subset\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$（这里 $j=2,\ 3,\ \cdots$）的补空间 $\mathscr{G}^j$ 的结构. 若 $\mathscr{G}_j$ 有某个基 $\{\tilde{\mathscr{E}}_1,\ \cdots,\ \tilde{\mathscr{E}}_l\}$，其中 $l=\dim\mathscr{G}_j$，则在 PB 范式(8.15)中，有

$$g_j(y)=a_1\tilde{\mathscr{E}}_1(y)+\cdots+a_l\tilde{\mathscr{E}}_l(y)\in\mathscr{G}_j, \tag{8.22}$$

其中 $a_1,\ \cdots,\ a_l$ 为常数. 应当注意，由于补空间 $\mathscr{G}_j$ 一般不是唯一的，不同的选取 $\mathscr{G}_j$ 的方法会给出不同的 PB 范式.

在 PB 范式计算中，往往要用 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 的基. 我们可以取 n 个变量的 j 次单项式为分量的 n 维向量作为一个基向量，并按反字典次序排列，成为 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 的一个基，其做法如下. 记

$$e_i=(0,\ \cdots,\ 0,\ \underset{(\text{第}\,i\,\text{位})}{1},\ 0,\ \cdots,\ 0)^T\in\mathbb{R}^n, \qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

对于 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T\in\mathbb{R}^n$ 和一组非负整数 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$，记

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

其中 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，$\mathscr{E}_{\alpha,i}=x^\alpha e_i$. 我们取 $\{\mathscr{E}_{\alpha,i}\mid|\alpha|=j,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 作为 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 的基，其中规定：若 $k>l$，或者若 $k=l$，$\alpha_1=\beta_1$，$\cdots$，$\alpha_{n-1}=\beta_{n-1}$，但 $\alpha_n>\beta_n$，则取 $\mathscr{E}_{\alpha,k}\prec\mathscr{E}_{\beta,l}$（即 $\mathscr{E}_{\alpha,k}$ 排在 $\mathscr{E}_{\beta,l}$ 前面）.

PB 范式的计算方法很多，这里只介绍矩阵法和共轭算子法。此外，还可以用李代数法、对称不变量理论等[45]。下面以二维系统为例来加说明。考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的与平衡点分岔有关的下列共振情形：

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{8.23}$$

1. 矩阵法

$\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 是一个有限维向量空间. 设 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 为 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 的一个基，$\boldsymbol{L}_j$ 为线性算子 $\mathfrak{L}_A^{(j)}$ 在这个基中的矩阵表示. 根据弗雷德霍姆择一性定理，矩阵 $\boldsymbol{L}_j^*$(即 $\boldsymbol{L}_j$ 的复共轭转置矩阵)的零空间 $\mathscr{N}(\boldsymbol{L}_j^*)$ 是值域 $\mathscr{R}(\boldsymbol{L}_j)$ 的正交补，即有 $\mathscr{N}(\boldsymbol{L}_j^*)=\mathscr{R}(\boldsymbol{L}_j)^{\perp}$. 由前所述，我们可取 $\mathscr{G}_j\cong\mathscr{N}(\boldsymbol{L}_j^*)$ 去计算 PB 范式(这里"$\cong$"表示"同构")。

[例 1]　考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})+O(\|\boldsymbol{x}\|^3), \tag{8.24}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)^T\in\mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{A}_1$ 见(8.23)，$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$ 是二次齐次多项式.

根据前面所述，我们取 $\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$ 的一个基：

$$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_6\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ x_1^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ x_1x_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ x_2^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1^2\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1x_2\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2^2\\ 0\end{pmatrix}\right\}. \tag{8.25}$$

因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{0}$，由(8.9)可知 $\mathfrak{L}_{A_1}^{(2)}=\boldsymbol{0}$，显然，它在基(8.25)中的矩阵 $\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{L}_2^*=\boldsymbol{0}$. 于是 $\mathscr{N}(\boldsymbol{L}_2^*)=\mathbb{R}^6$，相应地，$\mathscr{G}_2=\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$. 我们取(8.25)作为 $\mathscr{G}_2$ 的基，任何 $g_2\in\mathscr{G}_2$ 可写成

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{6}a_i\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{y}).$$

方程(8.24)的 2 阶 PB 范式为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{y})+O(\|\boldsymbol{y}\|^3),\qquad \boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2)^T\in\mathbb{R}^2$$

即

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_4y_1^2 + a_5y_1y_2 + a_6y_2^2 + O(\|y\|^3), \\ \dot{y}_2 = a_1y_1^2 + a_2y_1y_2 + a_3y_2^2 + O(\|y\|^3), \end{cases} \tag{8.26}$$

其中 $a_1, \cdots, a_6$ 是常数. 类似地，还知道对 $k\geqslant 3$ 也有

$$\mathscr{G}_k=\mathscr{H}_k(\mathbb{R}^2).$$

因此，在本情形中，k 阶 PB 范式就是向量场的 k 阶泰勒展开式.

[例 2]　考虑方程

$$\dot{x}=A_2x+f_2(x)+O(\|x\|^3), \qquad x\in\mathbb{R}^2 \tag{8.27}$$

其中 A_2 见(8.23)，$f_2(x)$ 是二次齐次多项式. 仍取(8.25)作为 $\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$ 的基. 由(8.9)和(8.23)，对 $p(y)=(p_1(y), p_2(y))^T\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$ 有

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}p(y) &= [Dp(y)]\cdot A_2y - A_2p(y) \\ &= \begin{pmatrix} \partial p_1/\partial y_1 & \partial p_1/\partial y_2 \\ \partial p_2/\partial y_1 & \partial p_2/\partial y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_2(\partial p_1/\partial y_1) - p_2 \\ y_2(\partial p_2/\partial y_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是，对(8.25)的基向量 $e_i(y)$（这里 $i=1, \cdots, 6$），有

$$\mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}e_1(y)=\begin{pmatrix} -y_1^2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix}=2e_2(y)-e_4(y),$$

$$\mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}e_2(y)=\begin{pmatrix} -y_1y_2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix}=e_3(y)-e_5(y),$$

$$\mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}e_3(y)=e_6(y), \qquad \mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}e_4(y)=2e_5(y),$$

$$\mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}e_5(y)=e_6(y), \qquad \mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}e_6(y)=0.$$

因此，线性算子 $\mathfrak{L}^{(2)}_{A_2}$ 在这个基 $\{e_1, \cdots, e_6\}$ 中的矩阵表示为

$$L_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.28}$$

为了确定 $\mathscr{N}(\mathfrak{L}_2^*)$，需要求解线性代数方程组

$$\boldsymbol{L}_2^*\xi=\boldsymbol{0}, \qquad \xi\in\mathbb{R}^6 \tag{8.29}$$

注意到 $\boldsymbol{L}_2^*=\boldsymbol{L}_2^T$，我们可得(8.29)的一个基本解组

$$\{(0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0)^T,\ (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T\}$$
$$=\{\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_1\}.$$

它是 $\mathscr{N}(\boldsymbol{L}_2^*)$ 的一个基，并对应 $\mathscr{G}_2\subset\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$ 的基

$$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{y}),\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2(\boldsymbol{y})\}=\left\{\begin{pmatrix}2y_1^2\\ y_1y_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ y_1^2\end{pmatrix}\right\}. \tag{8.30}$$

任何 $g_2\in\mathscr{G}_2$ 都可写成

$$g_2(\boldsymbol{y})=a_1\tilde{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{y})+a_2\tilde{\boldsymbol{e}}_2(\boldsymbol{y}),$$

其中 a_1、a_2 为常数。于是，我们可以通过适当的变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+p_2(\boldsymbol{y})$，$p_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$ 将(8.27)化为 2 阶 PB 范式

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y}+g_2(\boldsymbol{y})+O(\|\boldsymbol{y}\|^3), \qquad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$$

即

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2+2a_1y_1^2+O(\|\boldsymbol{y}\|^3),\\ \dot{y}_2=a_1y_1y_2+a_2y_1^2+O(\|\boldsymbol{y}\|^3).\end{cases} \tag{8.31}$$

我们还可以求高于 2 阶的 PB 范式。

我们知道，$\mathscr{G}_2$ 的取法不是唯一的。如果将(8.30)的基向量分别加上 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_{A_2}^{(2)})$ 中的向量，就可以得到新的补空间 $\mathscr{G}_2$ 的一个基，从而得到其他 2 阶 PB 范式。例如，取 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_{A_2}^{(2)})$ 的一个向量

$$\delta(\boldsymbol{y})=2\mathfrak{L}_{A_2}^{(2)}\tilde{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}-2y_1^2\\ 4y_1y_2\end{pmatrix},$$

并定义 $\tilde{\boldsymbol{e}}_1^*(\boldsymbol{y})=\tilde{\boldsymbol{e}}_1(\boldsymbol{y})+\delta(\boldsymbol{y})$、$\tilde{\boldsymbol{e}}_2^*(\boldsymbol{y})=\tilde{\boldsymbol{e}}_2(\boldsymbol{y})$。取

$$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1^*(\boldsymbol{y}),\ \tilde{\boldsymbol{e}}_2^*(\boldsymbol{y})\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ 5y_1y_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\ y_1^2\end{pmatrix}\right\}$$

作为新的补空间 $\mathscr{G}_2^*$ 的基，便得到(8.27)的另一个 2 阶 PB 范式

$$\begin{cases}\dot{y}_1=y_2+O(\|\boldsymbol{y}\|^3),\\ \dot{y}_2=a_1y_1y_2+a_2y_1^2+O(\|\boldsymbol{y}\|^3)\end{cases} \tag{8.32}$$

利用类似的方法，还可以得到(8.27)的其他 2 阶 PB 范式，如

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = y_2 + a_1 y_1^2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3),\\ \dot{y}_2 = a_2 y_1^2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3).\end{cases} \tag{8.33}$$

[例 3]　考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x} + \tilde{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \tag{8.34}$$

其中 $\boldsymbol{A}_3$ 见(8.23), $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = O(\|\boldsymbol{x}\|^2)$.

先计算(8.34)的 2 阶 PB 范式. 仍取(8.25)作为 $\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$的基. 直接计算得知, 对 $p(\boldsymbol{y}) = (p_1(\boldsymbol{y}), p_2(\boldsymbol{y}))^T\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$, 有

$$\mathfrak{L}_{A_3}^{(2)} p(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix}-y_2(\partial p_1/\partial y_1) + y_1(\partial p_1/\partial y_2) + p_2\\ -y_2(\partial p_2/\partial y_1) + y_1(\partial p_2/\partial y_2) - p_1\end{pmatrix}.$$

于是, 对(8.25)的基向量 $\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{y})$(这里 $i=1,\cdots,6$), 有

$$\mathfrak{L}_{A_3}^{(2)}\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1^2\\ 2y_1y_2\end{pmatrix} = -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \ \cdots\cdots.$$

因此, $\mathfrak{L}_{A_3}^{(2)}$ 在这个基中的矩阵表示为

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{8.35}$$

易见, 矩阵 $\boldsymbol{L}_2$ 是满秩矩阵, $\boldsymbol{L}_2^*$ 亦如此, 故方程

$$\boldsymbol{L}_2^*\xi = \boldsymbol{0} \qquad \xi\in\mathbb{R}^6 \tag{8.36}$$

只有零解. 于是, $\mathscr{G}_2 \cong \mathscr{N}(\boldsymbol{L}_2^*) = \{0\}$, 从而对 $g_2\in\mathscr{G}_2$ 有 $g_2(y) = 0$. (8.34)的 2 阶 PB 范式为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{y} + O(\|\boldsymbol{y}\|^3), \qquad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$$

即

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = -y_2 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3),\\ \dot{y}_2 = y_1 + O(\|\boldsymbol{y}\|^3)\end{cases} \tag{8.37}$$

其中不含二次项. 由于在(8.37)中略去三次项后的截断式只含线性部分, 它在非双曲平衡点附近一般不能反映原来的非线性方程

(8.34)的定性性态．为此，我们要进一步计算 3 阶 PB 范式．

取空间 $\mathscr{H}_3(\mathbb{R}^2)$ 的一个基：

$$
\left\{\begin{pmatrix}0\\x_1^3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\x_1^2x_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\x_1x_2^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\x_2^3\end{pmatrix},\right.
$$

$$
\left.\begin{pmatrix}x_1^3\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1^2x_2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_1x_2^2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2^3\\0\end{pmatrix}\right\},\tag{8.38}
$$

类似前面那样，可求出 L_3 在这个基中的矩阵表示：

$$
L_3=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
-3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right).\tag{8.39}
$$

方程 $L_3^*\xi=\mathbf{0}$（其中 $\xi\in\mathbb{R}^8$）有一个基础解组

$$\{(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)^T,\ (1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1)^T\}.$$

它对应 $\mathscr{G}_3\subset\mathscr{H}_3(\mathbb{R}^2)$ 的基

$$
\left\{\begin{pmatrix}y_1(y_1^2+y_2^2)\\y_2(y_1^2+y_2^2)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-y_2(y_1^2+y_2^2)\\y_1(y_1^2+y_2^2)\end{pmatrix}\right\}.\tag{8.40}
$$

由此得到(8.34)的 3 阶 PB 范式

$$
\begin{cases}\dot y_1=-y_2+ay_1(y_1^2+y_2^2)-by_2(y_1^2+y_2^2)+O(\|\boldsymbol{y}\|^4),\\ \dot y_2=y_1+ay_2(y_1^2+y_2^2)+by_1(y_1^2+y_2^2)+O(\|\boldsymbol{y}\|^4).\end{cases}\tag{8.41}
$$

在极坐标系中，(8.41)可写成较简单的形式：

$$
\begin{cases}\dot r=ar^3+O(r^4),\\ \dot\theta=1+br^2+O(r^3).\end{cases}\tag{8.42}
$$

最后指出，(8.34)在直角坐标系中的 PB 范式中不含二次项的结论亦可直接由共振关系得出．事实上，矩阵 $\boldsymbol{A}_3$ 有特征值

$$\lambda_{1,2} = \pm i,$$

易证它们是2阶非共振的，即对任何满足 $m_1+m_2=2$ 的非负整数 m_1、m_2，共振关系

$$\lambda_s = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \qquad (s=1,\ 2)$$

都不成立．因此，由前面的结果得知，在PB范式中，必有

$$g_2(\boldsymbol{y}) = 0.$$

矩阵法求PB范式的原理比较简单，容易进行计算．但是空间 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 的维数随 n 和 j 迅速增大，计算量会变得很大．此外，在求不同阶的PB范式时，要用不同的线性代数方程组求解，更增添了计算的复杂性．

2．共轭算子法

首先，在空间 $\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 中适当地定义内积．令

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$$

其中的记法如前，c_α 为实常数．我们记

$$f(\partial) = \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha \frac{\partial^j}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

对任何 $p(\boldsymbol{x}) = (p_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ p_n(\boldsymbol{x}))^T$、$q(\boldsymbol{x}) = (q_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ q_n(\boldsymbol{x}))^T \in \mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$，定义内积如下：

$$\langle p(\boldsymbol{x}),\ q(\boldsymbol{x})\rangle = \sum_{i=1}^n p_i(\partial)q_i(\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}=0}. \qquad (8.43)$$

令 $\boldsymbol{A}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复共轭转置矩阵，$(\mathfrak{L}_A^j)^*$ 为线性算子 $\mathfrak{L}_A^j$ 关于内积(8.43)的伴随算子．可以证明[45]，$(\mathfrak{L}_A^j)^* = \mathfrak{L}_{A^*}^j$．然后，根据弗雷德霍姆择一性定理，$(\mathscr{R}(\mathfrak{L}_A^j))^\perp = \mathscr{N}((\mathfrak{L}_A^j)^*) = \mathscr{N}(\mathfrak{L}_{A^*}^j)$．于是，我们可取 $\mathscr{G}_j = \mathscr{N}(\mathfrak{L}_{A^*}^j)$ 去计算PB范式．

因为 $\mathfrak{L}_{A^*}^j: \mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n)$ 是一个线性偏微分算子，所以零空间 $\mathscr{N}(\mathfrak{L}_{A^*}^j)$ 由一阶线性偏微分方程组

$$\mathfrak{L}_{A^*}^j P(\boldsymbol{x}) = [DP(\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^*P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

$$P\in\mathscr{H}_j(\mathbb{R}^n), \qquad (8.44)$$

的全部解组成．

【例 4】 用共轭算子法求例 2 的方程(8.27)的 2 阶 PB 范式.

由于 $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,有 $A_2^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. 记 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)^T$, $P(\boldsymbol{x})=(P_1(\boldsymbol{x}), P_2(\boldsymbol{x}))^T\in\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$,方程(8.44)为

$$\mathfrak{L}_{A_2^*}^{(2)}P(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\partial P_1/\partial x_1 & \partial P_1/\partial x_2\\ \partial P_2/\partial x_1 & \partial P_2/\partial x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{P_1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

即

$$\begin{cases}x_1\dfrac{\partial P_1}{\partial x_2}=0,\\ x_1\dfrac{\partial P_2}{\partial x_2}=P_1.\end{cases}\tag{8.45}$$

它在 $\mathscr{H}_2(\mathbb{R}^2)$ 中的全部解为

$$P_1(x)=ax_1^2,\qquad P_2(x)=ax_1x_2+bx_1^2,\tag{8.46}$$

其中 a、b 为任意常数. 由于(8.46)给出的 $P=(P_1, P_2)^T$ 的全体组成 $\mathscr{N}(\mathfrak{L}_{A^*}^{(2)})=\mathscr{G}_2$,故可取 $g_2(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{x})$ 去得到方程(8.27)的 2 阶 PB 范式

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+ax_1^2+O(\|\boldsymbol{x}\|^3),\\ \dot{x}_2=ax_1x_2+bx_1^2+O(\|\boldsymbol{x}\|^3).\end{cases}\tag{8.47}$$

注意: 由于这里的补空间 $\mathscr{G}_2$ 的取法与例 2 不同, 因此 PB 范式(8.47)与(8.31)~(8.33)都略有差别.

共轭算子法在求不同阶的 PB 范式时都遇到同样的线性偏微分方程组(8.44), 只是解空间取法不同. 在计算过程中无需大量的矩阵运算. 这种方法的主要局限性在于需要求出(8.44)在 $\mathscr{H}_r(\mathbb{R}^n)$ 中的全部解, 这在目前还没有通用的解法.

在结束本节时, 我们简单地讨论一下含参数的微分方程的 PB 范式问题. 含参数的方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}),\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^m\tag{8.48}$$

可以写成扩张系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}, \end{cases} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{8.49}$$

因此，我们可以用前面的理论来建立扩张系统的PB范式。这时近似恒同的坐标变换取下列形式：

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}), \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}, \tag{8.50}$$

其中$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu})$是关于$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{\mu}$的齐次多项式，这个变换能保持方程$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}$不变，从而所得的PB范式仍依赖于原参数$\boldsymbol{\mu}$。含参数的PB范式的计算方法如前所述，只不过各项的系数可以是$\boldsymbol{\mu}$的单项式。它们在动态分岔研究中有重要作用。

第 3 章

奇异性理论和静态分岔

§9 奇异性理论方法

奇异性理论是处理静态分岔的有效方法. 本节围绕静态分岔问题引进奇异性理论的基本概念.

§9.1 静态分岔的必要条件、奇异点

考虑静态方程

$$F(x, \mu)=0, \qquad x\in U\subseteq\mathscr{X}, \quad \mu\in J\subseteq\mathbb{R}^m \quad (9.1)$$

其中 C^r(这里 $r\geqslant 1$)映射 $F: U\times J\to\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$ 是巴拿赫空间, μ 是参数. 设 $(x_0, \mu_0)\in U\times J$ 是(9.1)的解, 即 $F(x_0, \mu_0)=0$. 在局部静态分岔问题中, 我们关心的是在 (x_0, μ_0) 附近, 方程(9.1)的解(即函数 F 的零点)的数目和稳定性随参数 μ 变化的情况. 取 (x_0, μ_0) 的某个足够小的邻域 $\Omega\subset U\times J$. 记 $n(\mu)$ 为当 μ 固定时(9.1)在 Ω 内的解的数目. 如果当 μ 变化经过 μ_0 时, $n(\mu)$ 发生突然变化, 则称 F 在 (x_0, μ_0) 处出现**静态分岔**, (x_0, μ_0) 为**静态分岔点**, μ_0 为**静态分岔值**. 概括地说, 静态分岔研究方程(9.1)的多重解问题.

定理 设 (x_0, μ_0) 满足 $F(x_0, \mu_0)=0$, 且为 $F(x, \mu)$ 的静态分岔点, 导算子 $\mathfrak{L}=D_xF(x_0, \mu_0)$ 是零指标的弗雷德霍姆算子[†], 则 $\mathfrak{L}$ 的零空间 $\mathscr{N}(\mathfrak{L})$ 的维数大于0, 即 $\mathfrak{L}$ 有零特征值.

我们用反证法来证明. 设若不然, 就有 $\dim\mathscr{N}(\mathfrak{L})=0$. 根据零指标的弗雷德霍姆算子性质, $\mathfrak{L}$ 是可逆的. 由隐函数定理可知, 在 μ_0 的某邻域内存在唯一的映射 $x=x(\mu)$, 使得 $x(\mu_0)=x^0$

† 参看第40页脚注. 对 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 为有限维空间的情形, 这个条件总是成立的.

和 $F(x(\mu),\ \mu)\equiv 0$. 这表明方程(9 1)的解的数目在 μ_0 附近保持不变，因此与$(x_0,\ \mu_0)$是静态分岔点的假设矛盾. 这就证明了本定理.

上面的定理给出静态分岔的必要条件，但它不是充分条件. 例如，方程

$$g(x,\ \mu)=x^3-\mu=0, \qquad x\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}$$

显然有 $g(0,\ 0)=0$, $D_xF(0,\ 0)=3x^2|_{(0,0)}=0$. 但是此方程对任何 $\mu\in\mathbb{R}$ 都有唯一的实解 $x=\mu^{1/3}$, 因此$(0,\ 0)$不是静态分岔点.

如果在点$(x_0,\ \mu_0)$处有 $F(x_0,\ \mu_0)=0$, 且 $D_xF(x_0,\ \mu_0)$的零空间的维数大于0, 则称$(x_0,\ \mu_0)$为 F 的一个奇异点. 设 $D_xF(x_0,\ \mu_0)$是零指标的弗雷德霍姆算子. 由上面的定理知道，若$(x_0,\ \mu_0)$是 F 的静态分岔点，则它必是 F 的奇异点. 但反之不一定成立. 在静态分岔研究中，我们首先求出 $F(x,\ \mu)$的奇异点，在该处可能将出现静态分岔. 然后再分析 $F(x,\ \mu)$在奇异点附近的性态，以判断在该奇异点处是否确实出现静态分岔，并进一步研究分岔的类型和性质. 奇异性理论是研究可微映射在奇异点附近的性态(称为"奇异性"，或"退化性")及其分类的数学理论.

分岔的奇异性理论主要包括三方面的内容：识别问题、开折问题和分类问题. 我们知道，在分岔研究中，通常可以利用约化的方法(例如 LS 方法、中心流形方法等)将原来的方程降维，这就只需讨论低维方程的分岔问题. 下面通过单变量静态分岔问题来介绍奇异性理论方法的基本思想和结果. 不失一般性，下面总是取奇异点为原点，否则可通过坐标变换去实现. 考虑从 $U\times V\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ($U\times V$ 包含原点) 到 $\mathbb{R}$ 的全体 C^∞ 函数 $g(x,\ \mu)$, 并作如下规定：对于函数 $g_1(x,\ \mu)$和 $g_2(x,\ \mu)$, 如果存在原点的某邻域 $\tilde{U}\times\tilde{V}\subset U\times V$, 使得 $g_1(x,\ \mu)=g_2(x,\ \mu)$对任何$(x,\ \mu)\in\tilde{U}\times\tilde{V}$ 成立，则把 g_1 和 g_2 看成等同的. 按上述等价关系得到的等价类称为芽(germ). 所有这样的芽组成一个线性空间——芽空间，记作 $\mathscr{E}_{x,\mu}$. 对任意个自变量的函数或映射，都可类似地建立芽的概念. 局部静

态分岔问题只涉及在奇异点附近的函数(或映射)性态，因此用芽去表述更为方便。

§9.2 识别问题

在单变量静态分岔问题中，我们研究静态方程

$$g(x,\ \mu)=0,\qquad x\in U\subset\mathbb{R},\ \mu\in V\subset\mathbb{R}\quad(9.2)$$

其中$(0,\ 0)\in U\times V$，芽$g\in\mathscr{E}_{x,\mu}$，并满足$g(0,\ 0)=g_x(0,0)=0$(即$(0,\ 0)$是g的奇异点)。

设g、$h\in\mathscr{E}_{x,\mu}$。如果在$(0,\ 0)$的某邻域内存在C^∞同胚$(x,\ \mu)\mapsto(X(x,\ \mu),\ M(\mu))$和$S(x,\ \mu)\in\mathscr{E}_{x,\mu}$，它们满足$M(0)=0$，$X(0,\ 0)=0$，$M'(0)>0$，$X_x(0,\ 0)>0$，$S(0,\ 0)>0$，使得

$$g(x,\ \mu)=S(x,\ \mu)h(X(x,\ \mu),\ M(\mu)),\qquad(9.3)$$

则称g和h**接触等价**，记作$g\sim h$。如果在上述定义中取$M(\mu)\equiv\mu$，则称g和h强等价，记作$g\overset{s}{\sim}h$。易知它们都是等价关系，且当$g\overset{s}{\sim}h$时必有$g\sim h$。

由(9.3)可见，当$g\sim h$时，在原点的足够小邻域内有$S\neq0$，故芽函数$g(x,\ \mu)$和$h(x,\ \mu)$之间可通过局部微分同胚$(X,\ M)$相互变换，从而g和h在原点附近有相同的分岔特性。具体地说，当$g\sim h$时，有下面的结果（见图9.1)：

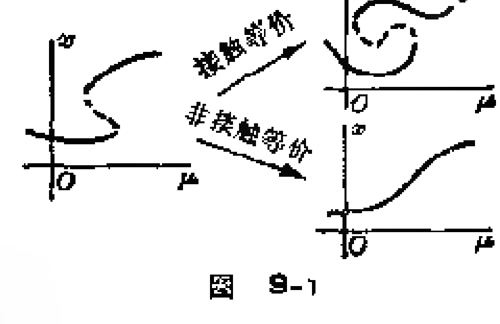


图 9-1

1. 若$(0,0)$是g的一个奇异点，则$(0,\ 0)$也是h的一个奇异点。

2. 方程$g(x,\ \mu)=0$和$h(x,\ \mu)=0$在$(0,\ 0)$附近解的数目有对应关系：$n_g(\mu)=n_h(M(\mu))$。

3. 方程$\dot{x}+g(x,\ \mu)=0$和$\dot{x}+h(x,\ \mu)=0$的对应轨线有相同的时间定向(这是由$X_x>0$，$S>0$保证的)，因此对应的平衡解

有相同的稳定性.

现在讨论奇异性的识别问题. 考虑 $h\in\mathscr{E}_{x,\mu}$. 设(0, 0)是 h 的一个奇异点. h 的识别问题就是研究与 h 强等价的 g 所需满足的条件. 这些条件称为 h 的"识别条件". 显然，对满足 h 的识别条件的 g，其静态分岔特性与 h 相同.

[例] $g(x, \mu)$ 与 $h(x, \mu)=x^3-\mu x$ 强等价的充要条件是在(0, 0)处有

$$g=g_x=g_{xx}=g_\mu=0,\quad g_{xxx}>0 \quad 和 \quad g_{x\mu}<0. \tag{9.4}$$

这里只给出必要性的证明. 充分性的证明可参看 [8] 的第二章§9. 取 $g(x, \mu)$ 的泰勒展开式:

$$g(x, \mu)=a_0+a_1x+a_2\mu+a_3x^2+a_4x\mu+a_5\mu^2+a_6x^3+\cdots. \tag{9.5}$$

设 g 与 $h=x^3-\mu x$ 强等价，即有

$$g(x, \mu)=S(x, \mu)[(X(x, \mu))^3-\mu X(x, \mu)]. \tag{9.6}$$

根据强等价定义中对 $X(x, \mu)$、$S(x, \mu)$的要求, 取

$$S(x, \mu)=s_0+\cdots,\quad X(x, \mu)=b_1x+b_2\mu+\cdots, \tag{9.7}$$

其中 $s_0>0$, $b_1>0$. 将(9.5)和(9.7)代入(9.6)，比较同次幂的系数，得

$$a_0=a_1=a_2=a_3=0,$$
$$a_4=-s_0b_1<0,\quad a_6=s_0b_1^3>0,$$

即(9.4)成立. 本例表明, (9.4)是 $h=x^3-\mu x$ 的识别条件.

对 $g\in\mathscr{E}_{x,\mu}$, 定义 g 的限制切空间如下:

$$RT(g)=\{a(x, \mu)g+b(x, \mu)g_x \mid a, b\in\mathscr{E}_{x,\mu},\ b(0, 0)=0\}.$$

$RT(g)$ 是 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 的子空间. 此外，取 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 的子空间 $\mathscr{P}(g)$，使得对任何 $p\in\mathscr{P}(g)$，都有 $RT(g+p)=RT(g)$. 可以证明（参看[8]的第二章§2 和 §12)，对任何 $p\in\mathscr{P}(g)$， $g+p$ 与 g 强等价. 因此，g 的识别问题归结为子空间 $\mathscr{P}(g)$的计算，后者可以通过引进内蕴理想去实现, 在此不再详述.

为了便于应用，通常选取一些简单且有代表性的多项式函数

$h(x, \mu)$去确定其识别条件. 这些函数 h 称为戈鲁比茨基-沙弗范式，以后简称为 **GS 范式**. 表 9.1 上列出了一些重要的分岔问题的 GS 范式的识别条件，其证明可参看[8]的第二章.

表 9.1　一些 GS 范式的识别条件

编号	GS 范式	在 $x=\mu=0$ 处的识别条件
1	$\varepsilon x^k+\delta\mu$ $(k\geqslant 2)$	$g=g_x=\cdots=\partial^{k-1}g/\partial x^{k-1}=0$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\partial^k g/\partial x^k)$ 和 $\delta=\mathrm{sgn}\, g_\mu\neq 0$
2	$\varepsilon x^k+\delta\mu x$ $(k\geqslant 2)$	$g=g_x=\cdots=\partial^{k-1}g/\partial x^{k-1}=g_\mu=0$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\partial^k g/\partial x^k)$ 和 $\delta=\mathrm{sgn}\, g_{x\mu}\neq 0$
3	$\varepsilon(x^2+\delta\mu^2)$	$g=g_x=g_\mu=0$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}\, g_{xx}$ 和 $\delta=\mathrm{sgn}\, \Delta\neq 0$
4	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3$	$g=g_x=g_\mu=\Delta=0$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}\, g_{xx}$ 和 $\delta=\mathrm{sgn}\, g_{vvv}\neq 0$
5	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	$g=g_x=g_\mu=\Delta=g_{vvv}=0$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}\, g_{xx}$ 和 $\delta=\mathrm{sgn}\, q\neq 0$
6	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	$g=g_x=g_\mu=g_{xx}=g_{x\mu}=0$, $\varepsilon=\mathrm{sgn}\, g_{xxx}$ 和 $\delta=\mathrm{sgn}\, g_{\mu\mu}\neq 0$

在表 9.1 中，sgn 表示符号函数，$\Delta=\det D^2g$，其中 D^2g 是函数 $g(x, \mu)$的海塞(L.O.Hesse)矩阵:

$$D^2g=\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{x\mu} \\ g_{x\mu} & g_{\mu\mu} \end{pmatrix}, \tag{9.8}$$

$\boldsymbol{v}$ 为 D^2g 的对应零特征值的特征向量，即满足 $(D^2g)\boldsymbol{v}=0$. g_v 表示 g 沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的导数. $q=g_{vvvv}g_{xx}-3g_{vvx}^2$.

值得注意的是，在表9.1上给出的识别条件只涉及 g 的有限多个偏导数；这时，称 GS 范式是**有限确定的**. 在表 9.1 上的各个GS范式的静态分岔性态很容易知道(参看后面的表 9.3和图 9.8). 因此对于实际问题给出的方程 $g(x, \mu)=0$，只要函数 g 满足表上的某个范式 h 的识别条件，就可以由范式 h 得知 g 的静态分岔性态.

许多高维以至无限维静态分岔问题可以通过 LS 方法化为单

变量静态分岔问题. 然而，一般难以得到约化函数 g 的明显表达式. 即使如此，由 §6 知道，我们可以直接用原来的函数的导数去计算约化函数的导数，因此奇异性理论特别适合于与 LS 方法配合去研究静态分岔问题.

我们还要指出，上面关于识别条件的讨论，是对已知的 GS 范式进行的. 至于在实际应用中如何寻找合适的 GS 范式，通常是一个十分复杂的问题. 如果我们知道函数 $g(x, \mu)$，就可以试取 $g(x, \mu)$ 的泰勒展开式中不为 0 的低阶项的某些线性组合作为 GS 范式 $h(x, \mu)$，再考察 h 是否与 g 强等价. 如果我们对于实际问题中出现的分岔特征大致上有所了解，也可以根据已有的 GS 范式的分岔图去试取合适的范式. 表 9.1、表 9.3 和图 9.8 在这方面提供了很有用的信息.

§9.3 开折问题

方程往往是对真实物理现象作一定的简化后得到的理想的数学模型. 真实状态与理想状态之间有一定差别，我们可以把真实状态看成理想状态的一个扰动，并研究这种扰动对方程的分岔性态的影响. 我们通过引进附加参数，即所谓"开折"(unfolding)的方法，去考虑可能出现的扰动，然后对受扰后的分岔性态进行分类.

1. 普适开折的概念

对芽 $g(x, \mu)\in\mathscr{E}_{x,\mu}$（其中 $\mu\in\mathbb{R}$），如果存在芽 $G(x, \mu, \boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{E}_{x,\mu,\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)\in\mathbb{R}^k(k\geqslant 0)$，使得当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时有

$$G(x, \mu, \mathbf{0})=g(x, \mu), \tag{9.9}$$

则称 G 为 g 的一个 **k-参数开折**，$\boldsymbol{\alpha}$ 称为**开折参数**. 特别地，g 的 0-参数开折就是 g 本身. 因为 $G(x, \mu, \boldsymbol{\alpha})=g(x, \mu)+[G(x, \mu, \boldsymbol{\alpha})-G(x, \mu, \mathbf{0})]$，所以 $G(x, \mu, \boldsymbol{\alpha})$ 可以看作 $g(x, \mu)$ 的一个扰动函数，其中扰动与 k 个附加参数 α_1、…、α_k 有关. 应当注意，g 有无穷多个开折，现在讨论它们之间的关系.

设 $G(x, \mu, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^k)$ 和 $H(x, \mu, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^l)$ 是芽 $g(x, \mu)$

的两个开折. 如果在$(x, \mu, \beta)=(0,0,0)$的某邻域内存在C^∞同胚$(x, \mu)\to(X(x, \mu, \beta), M(\mu, \beta))$, $S(x, \mu, \beta)\in\mathscr{E}_{x,\mu}$, $A(\beta)\in\mathscr{E}_\beta$, 并满足

$$S(0, 0, 0)>0, \quad X'_x(0, 0, 0)>0, \quad M'_\mu(0, 0)>0 \quad (9.10)$$

和

$$\begin{aligned} &S(x, \mu, 0)\equiv 1, \quad X(x, \mu, 0)\equiv x, \\ &M(\mu, 0)\equiv\mu, \quad A(0)=0 \end{aligned} \quad (9.11)$$

使得

$$\begin{aligned} H(x, \mu, \beta)=S(x, \mu, \beta)G(X(x, \mu, \beta), \\ M(\mu, \beta), A(\beta)), \end{aligned} \quad (9.12)$$

则称 H 由 G 代理(H factors through G)。

(9.12)表明, 对开折 H 的每个元素 $H(\cdot, \cdot, \beta)$, 都可找到开折 G 的某元素 $G(\cdot, \cdot, A(\beta))$与它接触等价. 也就是说, 开折 G 在接触等价的意义下包含了由开折 H 给出的一切扰动.

这里还对条件(9.10)和(9.11)作一些说明. 条件(9.10)是接触等价性所需的. 条件(9.11)保证 $G(x, \mu, 0)$ 和 $H(x, \mu, 0)$都等于 $g(x, \mu)$(见(9.9)).

[例] 令 $g(x, \mu)=x^3-\mu x$. 显然, $G(x, \mu, \alpha_1, \alpha_2)=x^3-\mu x+\alpha_1+\alpha_2x^2$ 是 g 的一个2-参数开折, $H(x, \mu, \beta)=x^3-\mu x+\beta^3$ 是 g 的一个1-参数开折, 其中 μ、α_1、α_2、$\beta\in\mathbb{R}$. 若取 $S=1$, $X=x+\beta$, $M=\mu+3\beta^2$, $A_1=0$, $A_2=-3\beta$, 则有 $H(x, \mu, \beta)=SG(X, M, A_1, A_2)$。这表明 H 可由 G 代理.

设 $g\in\mathscr{E}_{x,\mu}(\mu\in\mathbb{R})$, G 是 g 的某个开折, 且 g 的任何开折都可由 G 代理, 则称 G 是 g 的一个普用(versal)开折. g 的普用开折通常有无穷多个. 在它们中间, 所含参数的数目最少的开折称为普适(universal)开折, 其开折参数个数称为 g 的余维数, 记作 codim g. 应当注意, 并非任何 $g\in\mathscr{E}_{x,\mu}$ 都有普用开折. 如果 g 没有普用开折, 则称 g 的余维数为无限大. 此外, g 的普适开折一般不是唯一的.

g 的普适开折在接触等价的意义下, 引进数目最少的附加参

数，就能包含 g 的所有扰动函数．因此，在研究方程 $g=0$ 受扰后可能出现的各种分岔性态时，普适开折将起着十分重要的作用．

2．普适开折的计算

为计算普适开折，需要引进切空间的概念．$g\in\mathscr{E}_{x,\mu}$ 的切空间可定义为

$$T(g)=\{a(x,\mu)g+b(x,\mu)g_x+c(\mu)g_\mu\},\qquad(9.13)$$

其中 a、$b\in\mathscr{E}_{x,\mu}$，$c\in\mathscr{E}_\mu$．显然，$T(g)$是 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 的子空间．可以证明[8]，g 的余维数等于切空间 $T(g)$的余维数，即

$$\operatorname{codim} g=\operatorname{codim} T(g)=\dim V=k,\qquad(9.14)$$

其中 V 是 $T(g)$在 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 中的补空间，$\mathscr{E}_{x,\mu}=T(g)\oplus V$．若 V 有一组基向量$\{p_1,\cdots,p_k\}$，则

$$G(x,\mu,\alpha)=g(x,\mu)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_j(x,\mu)\qquad(9.15)$$

是 g 的一个普适开折，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\in\mathbb{R}^k$ 是开折参数．于是普适开折的计算可归结为确定补空间 V 的基向量．

在后面的表 9.3 上列出了一些余维数不超过 3 的 GS 范式的普适开折，一般的结果可参看[8]的第三章§2．这里通过几个例子予以说明．

［例 1］　设 $g(x,\mu)=x^2+\mu$．由(9.13)知

$$T(g)=\{a(x,\mu)\cdot(x^2+\mu)+b(x,\mu)\cdot(2x)+c(\mu)\}.$$

对任何$f\in\mathscr{E}_{x,\mu}$，由它在(0，0)处的泰勒展开式，有

$$f(x,\mu)=f_0(\mu)+f_1(x,\mu)x.$$

显然，有$f\in T(g)$．因此$\mathscr{E}_{x,\mu}=T(g)\oplus\{0\}$．$T(g)$在 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 中的补空间 $V=\{0\}$，故 $\operatorname{codim} g=\dim V=0$，从而 g 的普适开折就是它本身．函数 $x^2+\mu^2$ 的奇异点(0，0)称为极限点，在该处的静态分岔图见图 9.2．由于 g 已包含了对它的一切扰动，因此对 g 的任何小扰动都不会改变静态分岔图．这表明极限点分岔是通有的．图 9.2 上标明的解的稳定性，是对动态方程 $\dot{x}+g(x,\mu)=0$ 的平衡解而言的(以后均如此)．

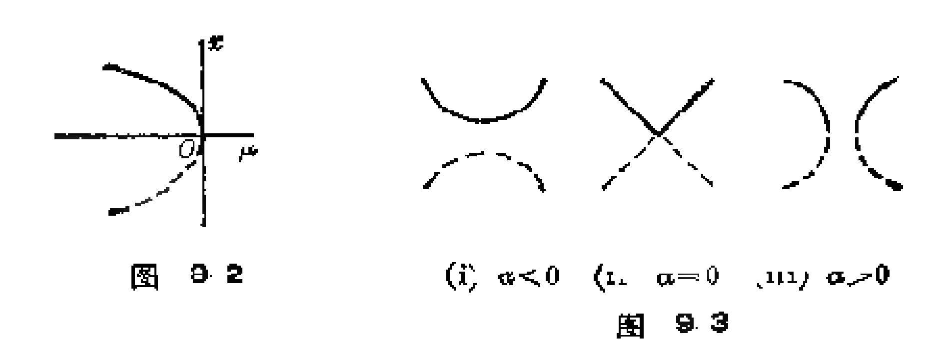


图 9.2 (i) $\alpha<0$ (ii) $\alpha=0$ (iii) $\alpha>0$

图 9.3

[例 2] 设 $g(x, \mu)=x^2-\mu^2$. 由(9.13)知

$$T(g)=\{a(x, \mu)\cdot(x^2-\mu^2)+b(x, \mu)\cdot(2x)+c(\mu)\cdot(-2\mu)\}.$$

对任何 $f\in\mathscr{E}_{x,\mu}$, 由它在(0, 0)处的泰勒展开式有

$$f(x, \mu)=f_0+f_1(\mu)\mu+f_2(x, \mu)x=f_0(\mathrm{mod}\,T(g))^{\dagger},$$

其中 f_0 是常数. 因此 $\mathscr{E}_{x,\mu}=T(g)\oplus V$, 补空间 V 是以 1 为基向量张成的子空间. 于是 $\mathrm{codim}\,g=\dim V=1$. 取 $p_1=1$, 由(9.15)得到 g 的一个普适开折

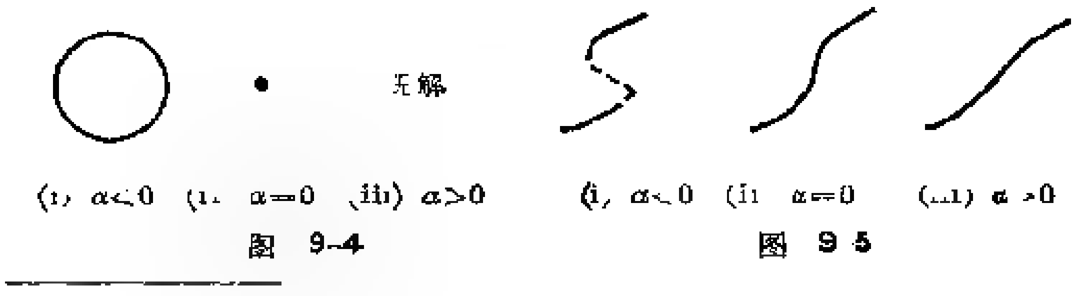
$$G(x, \mu, \alpha)=x^2-\mu^2+\alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R} \quad (9.16)$$

函数 $x^2-\mu^2$ 的静态分岔图见图 9-3(ii), 它的奇异点(0, 0)称为"跨临界点"或"简单分岔点". 在图 9-3(i)和(iii)上分别给出普适开折 G 当 $\alpha<0$ 和 $\alpha>0$ 时的静态分岔图. 我们见到, 对 g 的任意小的扰动($\alpha\neq0$), 都会完全改变分岔的性态.

[例 3] 设 $g(x, \mu)=x^2+\mu^2$. 类似地可得 $\mathrm{codim}\,g=1$, $T(g)$ 在 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 中的补空间 V 是以 1 为基向量张成的子空间. 取 $p_1=1$, 便得到 g 的一个普适开折

$$G(x, \mu, \alpha)=x^2+\mu^2+\alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R} \quad (9.17)$$

函数 $x^2+\mu^2$ 的奇异点(0, 0)称为"孤立点". g 及其普适开折 G 的



(i) $\alpha<0$ (ii) $\alpha=0$ (iii) $\alpha>0$

图 9-4

(i) $\alpha<0$ (ii) $\alpha=0$ (iii) $\alpha>0$

图 9-5

---

† $F_1=F_2(\mathrm{mod}\,T(g))$ 表示差 $F_1-F_2\in T(g)$.

静态分岔图见图 9-4. 这时对 g 的任意小的扰动也会完全改变分岔的性态.

[例 4] 设 $g(x, \mu)=x^3-\mu$. 类似地, 可得 $\operatorname{codim} g=1$. $T(g)$ 在 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 中的补空间 V 是以 x 为基向量张成的子空间. 取 $p_1=x$, 便得到 g 的一个普适开折

$$G(x, \mu, \alpha)=x^3-\mu+\alpha x, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{9.18}$$

函数 $x^3-\mu$ 的奇异点 $(0, 0)$ 称为"滞后点". g 及其普适开折 G 的静态分岔图见图 9-5. 易见, 对 g 的任意小扰动也会完全改变分岔的性态.

[例 5] 设 $g(x, \mu)=x^3-\mu x$. 可以证明 $\operatorname{codim} g=2$. $T(g)$ 在 $\mathscr{E}_{x,\mu}$ 中的补空间 V 是由 $\{1, x^2\}$ 张成的, 从而 g 的一个普适开折为

$$G_1(x, \mu, \alpha, \beta)=x^3-\mu x+\alpha+\beta x^2, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \tag{9.19}$$

在图 9-7 上给出普适开折 G_1 在不同的 (α, β) 数值下的静态分岔图. 函数 $x^3-\mu x$ 的奇异点是"叉形点". 此外, 还可求得 g 的另一个普适开折

$$G_2(x, \mu, \alpha, \beta)=x^3-\mu x+\alpha+\beta \mu, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \tag{9.20}$$

3. 普适开折的识别

我们已经讨论过对给定的 g 计算其普适开折 G 的问题. 在应用中, 往往还需要考虑判别普适开折的问题, 即: 已知 $g(x, \mu)$ 与某个余维数 k 的 GS 范式 $h(x, \mu)$ 强等价, $G(x, \mu, \nu)$ 是 g 的一个 k-参数开折 $(\nu \in \mathbb{R}^k)$, 我们要判别 G 是否 g 的普适开折. 为此, 我们只需利用 g 和 G 的一些导数去得到某个矩阵 $\boldsymbol{A}(x, \mu, \nu)$, 则 G 是 g 的普适开折的充分必要条件是

$$\det \boldsymbol{A}(0, 0, 0) \neq 0. \tag{9.21}$$

表 9-2 对一些重要的 GS 范式(其上的编号同表 9-3)给出相应的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 在表中, α、β、γ 等是普适开折中的开折参数, $\varepsilon=\pm 1, \delta=\pm 1$.

4. 普适开折的保持性、转迁集

设 $G(x, \mu, \alpha)$ 是 $g(x, \mu) \in \mathscr{E}_{x,\mu}$ 的一个 k 参数普适开折, $(0, 0)$

表 9.2 普适开折的识别条件

编号	GS 范式 h	矩阵 A
1	$\varepsilon x^2+\delta\mu$	[illegible]
2 3	$\varepsilon x^2+\delta\mu^2$	G_α
4	$\varepsilon x^3+\delta\mu$	$\begin{pmatrix} g_\mu & g_{\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} \end{pmatrix}$
5	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3$	$\begin{pmatrix} 0 & g_{xx} & g_{x\mu} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} \end{pmatrix}$
6	$\varepsilon x^3+\delta\mu x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
7	$\varepsilon x^4+\delta\mu$	$\begin{pmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} \end{pmatrix}$
8	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{\mu\mu} \\ 0 & g_{xx} & g_{x\mu} & g_{xxx} & g_{xx\mu} & g_{x\mu\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{xx} & 2g_{x\mu} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha x\mu} & G_{\alpha\mu\mu} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta x\mu} & G_{\beta\mu\mu} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma x\mu} & G_{\gamma\mu\mu} \end{pmatrix}$
9	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & g_{xxx} & g_{xx\mu} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma\mu x} \end{pmatrix}$
10	$\varepsilon x^4+\delta\mu x$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{x\mu} & 0 & g_{xxxx} \\ 0 & g_{\mu x} & g_{\mu\mu} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma\mu} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{pmatrix}$
11	$\varepsilon x^5+\delta\mu$	$\begin{pmatrix} g_\mu & g_{\mu x} & g_{\mu xx} & g_{\mu xxx} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha xxx} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta xx} & G_{\beta xxx} \\ G_\gamma & G_{\gamma x} & G_{\gamma xx} & G_{\gamma xxx} \end{pmatrix}$

是 g 的一个奇异点. 由于普适开折 G 已包含了对 g 的一切扰动, 因此 G 的静态分岔图反映了当 g 受扰时可能出现的各种分岔性态. 我们要讨论开折参数 α 对普适开折 G 的分岔图的影响, 即"保持性(persistence)"问题.

如果对 $\alpha\in\mathbb{R}^k$ 的一个邻域 U 中的任何 β, $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 与 $G(\cdot, \cdot, \beta)$ 接触等价, 从而当 $G(x, \mu, \alpha)$ 受到小扰动时分岔图的定性性态保持不变, 则称 G 在 α 处的分岔图是持久的, 即分岔是**通有**(或**稳定**)的. 否则, 分岔图是**非持久的**, 即分岔是**退化**(或**不稳定**)的.

研究表明, 当且仅当 α 属于下列点集之一时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图是非持久的:

1. $\mathscr{B}=\{\alpha\in\mathbb{R}^k$ | 存在 (x, μ), 使得在 (x, μ, α) 处有 $G=G_x=G_\mu=0\}$.

2. $\mathscr{H}=\{\alpha\in\mathbb{R}^k$ | 存在 (x, μ), 使得在 (x, μ, α) 处有 $G=G_x=G_{xx}=0\}$.

3. $\mathscr{D}=\{\alpha\in\mathbb{R}^k$ | 存在 (x_i, μ) $(i=1, 2)$, $x_1\neq x_2$, 使得在 (x_i, μ, α) 处有 $G=G_x=0\}$

我们把满足集 $\mathscr{B}$、$\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{D}$ 中的条件的 $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的奇异点 (x, μ) 分别称为**分支点**、**滞后点**和**双极限点**. 在图 9-3 和图 9-4 上给出分支点的分岔图的扰动情况(注意: 跨临界点和孤立点都满足分支点的条件), 图 9-5 给出滞后点的分岔图的扰动情况. 双极限点包含两个极限点(见图 9-6(i)), 它的分岔图在受扰后也会发生本质的变化(见图 9-6(ii) 和 (iii)).

记集 $\Sigma=\mathscr{B}\cup\mathscr{H}\cup\mathscr{D}$, 称为**转迁集**(transition set). 它把开折参数空间 $\mathbb{R}^k$ 分成若干子区域. 于是, 我们可以将 $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图按开折参数 α 分为持久的和非持久的两大类. 当 $\alpha\in\Sigma$ 时, $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图不是持久的, 并可按 Σ 的不同子集作进一步的分类. 当 $\alpha\notin\Sigma$ 时, $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图是持久的, 并可按各子区域作进一步的分类. 这样, 我们可对 g 受扰后可能出现的各

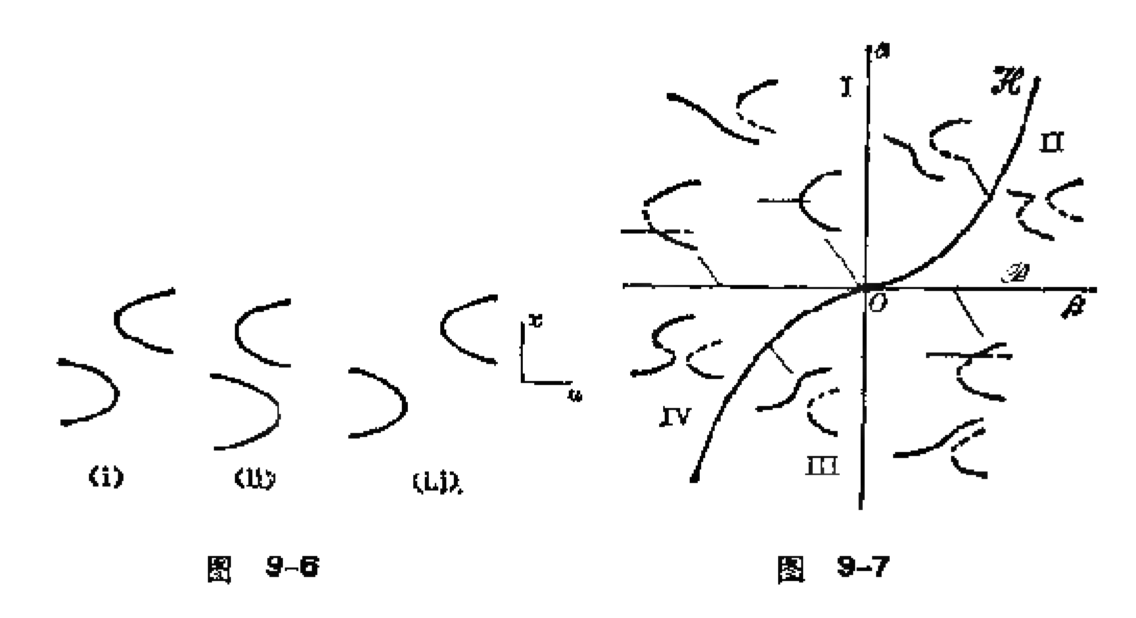


图 9-6　　　　图 9-7

种通有或退化的分岔作深入分析.

[例 1]　考虑 $g(x, \mu)=x^2-\mu^2$. 由前面知道, g 的普适开折为 $G(x, \mu, \alpha)=x^2-\mu^2+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. 为了确定集 $\mathscr{B}$, 取

$$G=x^2-\mu^2+\alpha=0,\quad G_x=2x=0,\quad G_\mu=-2\mu=0.$$

由此解得 $x=\mu=0$ 和 $\alpha=0$. 因此集 $\mathscr{B}$ 仅包含一点 $\alpha=0$, 相应的 $G(x, \mu, 0)$ 的奇异点是 $(0, 0)$. 利用集 $\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{D}$ 的条件, 可知它们不存在, 即 $\mathscr{H}=\varnothing$, $\mathscr{D}=\varnothing$. 由此可知转迁集 $\Sigma=\mathscr{B}=\{0\}$. 由图 9-3, 显见 $G(x, \mu, 0)$ 的分岔图不是持久的, 而当 $\alpha\neq 0$ 时, $G(x, \mu, \alpha)$ 的分岔图是持久的.

[例 2]　考虑 $g(x, \mu)=x^3-\mu x$, 它的一个普适开折是

$$G(x, \mu, \alpha, \beta)=x^3-\mu x+\alpha+\beta x^2.$$

利用 $G_x=3x^2-\mu+2\beta x$, $G_\mu=-x$, $G_{xx}=6x+2\beta$, 不难求出

$$\mathscr{B}=\{(\alpha, \beta)\in R^2 \mid \alpha=0\},$$
$$\mathscr{H}=\{(\alpha, \beta)\in R^2 \mid \alpha=\beta^3/27\},$$
$$\mathscr{D}=\varnothing.$$

转迁集 $\Sigma=\mathscr{B}\cup\mathscr{H}$. 图 9-7 给出了 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{H}$ 的图形, 它们把参数 (α, β) 平面分成四个子区域. 在图上还给出集 $\mathscr{B}$、$\mathscr{H}$ 和各个子区域的开折参数 (α, β) 值所对应的 $G(x, \mu, \alpha, \beta)$ 的分岔图. 在四个子区域 I、II、III 和 IV 中, G 的分岔图上的奇异点都是极限点.

在集 $\mathscr{B}$（即 β 轴）上，G 的分岔图上有跨临界点（它是分支点）。在集 $\mathscr{H}$（即曲线 $\alpha=\beta^3/27$）上，G 的分岔图上有滞后点。在原点处，G 的分岔图上有叉形点（它既是分支点，也是滞后点）。

最后指出，尽管从原理上普适开折讨论的仍然是局部分岔性态，但是有时可以通过局部结果去获知一些全局分岔性态。此外，应用中经常遇到多参数系统，普适开折提供了有关物理参数空间的结构和选择定性分析所需的组合参数的重要信息。

§9.4 分 类 问 题

设 $g(x,\ \mu)\in\mathscr{E}_{x,\mu}$，$g: U\times V\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。现在讨论如何将众多的方程 $g(x,\ \mu)=0$ 的静态分岔按定性性态进行分类的问题。由于随着 g 的余维数增加，奇异点的退化程度增大，在 g 受扰后可能出现的分岔情况越复杂，因此余维数在静态分岔的分类问题中起

表 9.3 余维数不大于 3 的奇异点的 GS 范式和普适开折

编号	名称	余维数	GS 范式	普适开折
1	极限点	0	$\varepsilon x^2+\delta\mu$	$\varepsilon x^2+\delta\mu$
2	跨临界点	1	$\varepsilon(x^2-\mu^2)$	$\varepsilon(x^2-\mu^2)+\alpha$
3	孤立点	1	$\varepsilon(x^2+\mu^2)$	$\varepsilon(x^2+\mu^2)+\alpha$
4	滞后点	1	$\varepsilon x^3+\delta\mu$	$\varepsilon x^3+\delta\mu+\alpha x$
5	非对称尖点	2	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3$	$\varepsilon x^2+\delta\mu^3+\alpha+\beta\mu$
6	叉形点	2	$\varepsilon x^3+\delta\mu x$	$\varepsilon x^3+\delta\mu x+\alpha+\beta x^2$
7	四次折迭点	2	$\varepsilon x^4+\delta\mu$	$\varepsilon x^4+\delta\mu+\alpha x+\beta x^2$
8	四次孤立点	3	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4$	$\varepsilon x^2+\delta\mu^4+\alpha+\beta\mu+\gamma\mu^2$
9	双翼尖点	3	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2$	$\varepsilon x^3+\delta\mu^2+\alpha+\beta x+\gamma\mu x$
10	四次跨临界点	3	$\varepsilon x^4+\delta\mu x$	$\varepsilon x^4+\delta\mu x+\alpha+\beta\mu+\gamma x^2$
11	五次滞后点	3	$\varepsilon x^5+\delta\mu$	$\varepsilon x^5+\delta\mu+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3$

注：表中的 ε 和 δ 可取 $+1$ 或 -1；α、β、γ 等是开折参数

着重要的作用．这里只对余维数不超过3的奇异点进行分类．当然我们还可对更高余维数的静态分岔进行分类．

研究表明，若(0, 0)是 g 的奇异点，且 $\operatorname{codim} g \leqslant 3$，则 g 必与表 9.3 上所列的 11 种 GS 范式中的某个强等价．也就是说，余维数不大于3的奇异点只有11种静态分岔性态．它们也是在实际应用中经常遇到的静态分岔类型，相应的分岔图见图 9-8．有关它们的普适开折的转迁集和持久分岔图的更多结果，可参看[8]的第四章§4．

在静态分岔研究中，奇异性理论不但是一种有效的理论方法，而且有助于对数值计算和实验得到的结果进行深入分析，因此是很重要的。

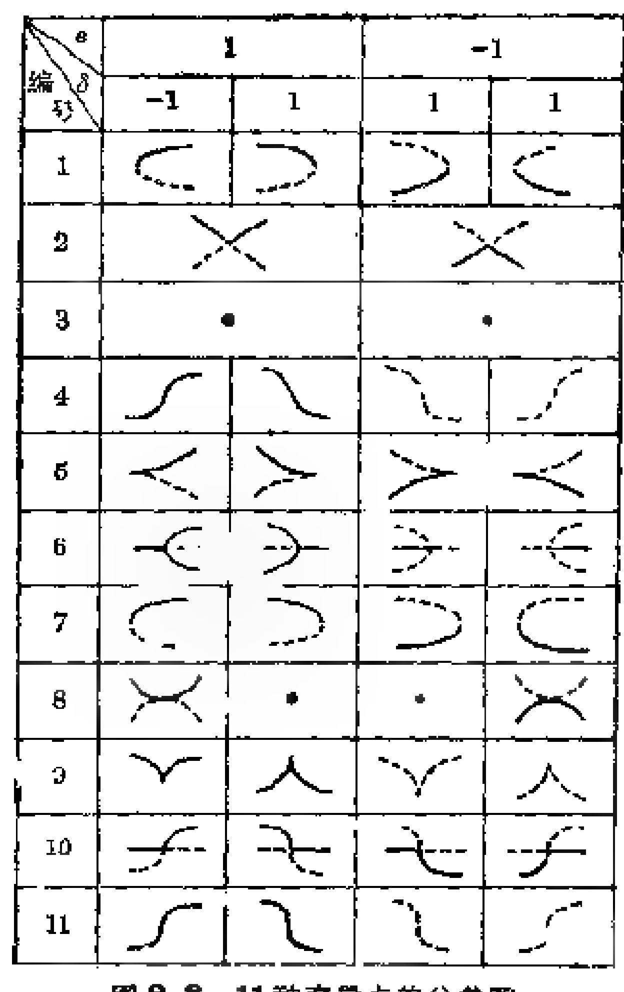


图 9-8　11种奇异点的分岔图

（图上所示的稳定性是对动态方程 $\dot{x}+g(x, \mu)=0$ 的平衡解而言的）

§ 10　单变量静态分岔

前面介绍了单变量静态分岔的奇异性理论，本节通过一些例子进一步说明之.

§ 10.1　弹性结构系统

[例 1]　杆件-弹簧系统

先考虑图 10-1 所示的力学系统. 它由两根铰接的刚性杆及扭转弹簧组成. 设杆长等于 1，弹簧的弹性系数也等于 1. 在 B 点处作用着水平压力 λ. 取角度 x 为此系统的状态变量. 设系统处于静平衡状态. 该系统的势能为

$$V(x,\ \lambda)=\frac{x^2}{2}+2\lambda(\cos x-1), \tag{10.1}$$

其中第一项是弹簧的弹性势能，第二项是外力所作的功. 静平衡状态由下面的方程决定:

$$\bar{g}(x,\ \lambda)=\frac{\partial V}{\partial x}=x-2\lambda\sin x=0. \tag{10.2}$$

显然，$\bar{g}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)=\bar{g}_x\left(0,\ \frac{1}{2}\right)=0$，故$(x,\ \lambda)=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$是 $\bar{g}$ 的一个奇异点.

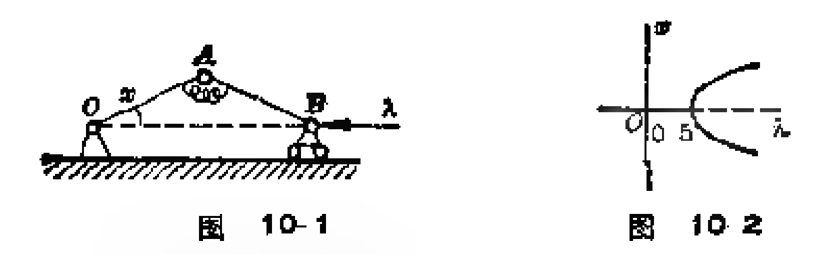


图　10-1　　　　图　10-2

作变换 $\mu=\lambda-1/2$，方程(10.2)变为

$$g(x,\ \mu)=x-(2\mu+1)\sin x=0. \tag{10.3}$$

$(x,\ \mu)=(0,\ 0)$是 g 的一个奇异点，在该处有

$$g(0,\ 0)=g_x(0,\ 0)=g_{xx}(0,\ 0)=g_\mu(0,\ 0)=0,$$

$$g_{xxx}(0,\ 0)=1,\quad g_{x\mu}(0,\ 0)=-2.$$

根据表 9.1 给出的识别条件，可知 $g(x,\ \mu)$ 与GS范式 $h(x,\ \mu)=x^3-\mu x$ 强等价。从而，在(0, 0)处方程 $g(x,\ \mu)=0$ 与方程 $h(x,\ \mu)=0$ 有相同的分岔性态．即在该处出现超临界叉形分岔．其分岔图见图 9-8 的第六行的第一图．由于 $\lambda=\mu+\dfrac{1}{2}$，$\bar{g}(x,\ \lambda)=0$ 在 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 处出现超临界叉形分岔（见图 10-2）．

再考虑上述系统的一个扰动系统（见图 10-3）．扰动来自两方面．一方面是结构重量的影响，它可由作用在中间铰链向下的力 ε 表示．另一方面是弹簧的非对称性，它可由当所有外力皆为 0 时杆系的平衡位置 $x_0=\delta$ 表示；如果弹簧是对称的，则 $\delta=0$．我们通过附加的小参数 ε 和 δ 去描述扰动．这个扰动系统的势能为

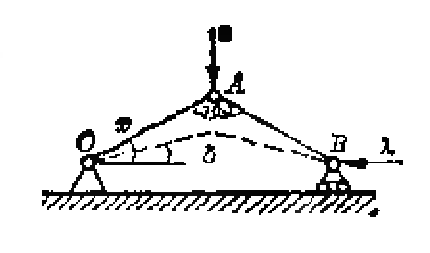


图 10-3

$$V^*(x,\ \lambda,\ \varepsilon,\ \delta)=(x-\delta)^2/2+2\mu(\cos x-1)+\varepsilon\sin x. \tag{10.4}$$

静平衡状态由下面的方程决定：

$$G^*(x,\ \lambda,\ \varepsilon,\ \delta)\equiv x-\delta-2\lambda\sin x+\varepsilon\cos x=0, \tag{10.5}$$

即

$$G(x,\ \mu,\ \varepsilon,\ \delta)\equiv x-\delta-(2\mu+1)\sin x+\varepsilon\cos x=0. \tag{10.6}$$

因为 $G(x,\ \mu,\ 0,\ 0)=g(x,\ \mu)$，所以 G 是 g 的一个 2-参数开折．我们想知道 G 是否是 g 的一个普适开折，即 G 能否包含 g 的一切扰动．由于 g 与GS范式 $h=x^3-\mu x$ 强等价，我们当然可以根据表 9.2 给出的普适开折识别条件去判定．这里不作详细计算，只从另外的角度给出一些说明．作变换

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{6}},\quad \nu=2\sqrt[3]{6}\,\mu,\quad \alpha_1=\varepsilon-\delta,\quad \alpha_2=\frac{-\varepsilon}{2\sqrt[3]{96}}, \tag{10.7}$$

则方程(10.6)可写成泰勒展开式：

$$H(y,\ \nu,\ \alpha_1,\ \alpha_2)\equiv y^3-\nu y+\alpha_1+\alpha_2 y^2+\cdots\cdots=0. \tag{10.8}$$

如果略去高阶项，(10.8)给出 $h(y, \nu)=y^3-\nu y$ 的一个普适开折。由于(10.7)是微分同胚，它把 $h(y, \nu)$ 和 $H(y, \nu, \alpha_1, \alpha_2)$ 分别变为 $g(x, \mu)$ 和 $G(x, \mu, \varepsilon, \delta)$，因此 $G(x, \mu, \varepsilon, \delta)$ 应当是 $g(x, \mu)$ 的普适开折。若取组合参数 α_1、α_2，则 $g(x, \mu)$ 的奇异点(0, 0)受扰后可能出现的各种分岔图以及转迁集的情况见图 9-7。我们还可以通过变换(10.7)，得知在原来参数(ε, δ)平面上的转迁集。

[例 2] 压杆屈曲

我们继续研究§3中的压杆屈曲问题。利用 LS 方法(见§6例 2)，巴拿赫空间 $\mathscr{X}$ 中的非线性方程(见(6.20))

$$F(u, \mu)=-u''-\mu\sin u=0$$

$$u\in\mathscr{X},\ \mu\in\mathbb{R} \qquad (10.9)$$

在奇异点$(u, \mu)=(0, 1)$附近的分岔问题可约化为一维分岔方程(见(6.34)或(6.35))

$$g(x, \mu)=0. \qquad (10.10)$$

前已指出，我们无法得到方程(10.10)的具体表达式，因此不能直接对(10.10)进行分岔分析。然而，我们可以用奇异性方法去进行定性分析，首先根据奇异性的识别理论去研究奇异点(0,1)的分岔性态。为此，要用§6给出的公式由函数 F 的导数去计算 g 的一些导数。注意到这里的函数 $F(u,\mu)$ 是 u 的奇函数，即 $F(-u,\mu)=-F(u, \mu)$，由§6知道，g 的导数计算可以大大简化。在奇异点(0, 1)处有下面的结果：

1. $g=g_x=g_{xx}=g_\mu=0$.

2. $g_{xxx}=\langle v_1^*, D^3F(v_1, v_1, v_1)\rangle$.

因为 $\mathscr{R}(\mathfrak{L})^\perp=\mathscr{N}(\mathfrak{L})$，所以 $v_1^*=v_1=\cos s$。此外，考虑到

$$\begin{aligned}D^3F(\xi_1, \xi_2, \xi_3)|_{(0,1)}&=\frac{\partial^3}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}[-(t_1\xi_1''+t_2\xi_2''+t_3\xi_3'')\\&\quad+\sin(t_1\xi_1+t_2\xi_2+t_3\xi_3)]\Big|_{t_1=t_2=t_3=0}\\&=\xi_1\xi_2\xi_3\cos(0)=\xi_1\xi_2\xi_3,\end{aligned}$$

故有 $g_{xxx} = \langle \cos s, \cos^3 s\rangle = \int_0^{\pi} \cos^4 s ds = \frac{3\pi}{8} > 0.$

3. $g_{x\mu} = \langle v_1^*, (DF_\mu)\cdot v_1\rangle.$

考虑到 $F_\mu = -\sin u$, $(DF_\mu)\cdot v_1|_{(0,1)} = -v_1 = -\cos s$, 故有

$$g_{x\mu} = \langle \cos s, -\cos s\rangle = -\int_0^{\pi} \cos^2 s ds = -\frac{\pi}{2} < 0.$$

由表 9.1 知道，$g(x, \mu)$在奇异点(0, 1)附近强等价于 GS 范式 $h(x, \mu) = x^3 - (\mu-1)x$. 因此约化方程(10.10)在(0, 1)处出现超临界叉形分岔，原方程(10.9)也在$(u, \mu)=(0, 1)$处有同样的分岔性态. 这个结论与由精确解得到的结果(见图 3.2)一致

实际的杆件往往有某些缺陷. 如微小的原始弯曲、材料的非对称性、砂眼等，它们可以看作是对弹性杆系统的扰动. 我们能够利用普适开折理论去讨论有缺陷的压杆的一切可能的屈曲状态[54].

§ 10.2 化学反应器系统

现在讨论 § 3 中的 CSTR 的静态分岔问题. 考虑系统(3.10)的平衡态(y, θ)，它们满足静态方程

$$\begin{cases} \lambda y - D_a(1-y)E(\theta) = 0, \\ \lambda\theta - \beta_1 D_a(1-y)E(\theta) + \beta D(\theta-\theta_c) = 0, \end{cases} \tag{10.11}$$

其中各量的含义参见(3.10)的说明. 从第一式中解出 y，并代入第二式，令 $x=\theta/\gamma$，则有

$$G(x, \mu, \alpha, \beta, \eta) = (1+\mu)x - \eta - \frac{\alpha\mu}{1+\beta\mu A(x)} = 0, \tag{10.12}$$

其中

$$A(x) = \exp[-\gamma x/(1+x)],$$

$$\mu = \lambda/(\beta D), \quad \eta = \theta_c/\gamma, \quad \alpha = \beta_1/\gamma,$$

γ 为常数，并要求 $x>0$.

首先指出，对 $\gamma > 8/3$，存在唯一的一组数 $z_0 = (x_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$，使得在$(x_0, \mu_0)$处 $g(x, \mu) = G(x, \mu, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$有一个

双翼尖点. 为此，我们证明 x, μ, α, β, η 的下列方程组

$$G=G_x=G_{xx}=G_\mu=G_{x\mu}=0 \tag{10.13}$$

有唯一的解 $z_0=(x_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$，使得在该处有 $G_{xxx}>0$ 和 $G_{\mu\mu}>0$. 记 $\Delta=1+\beta\mu A(x)$. 容易求出下列结果:

$$G=(1+\mu)x-\eta-\alpha\mu/\Delta,$$

$$G_\mu=x-\alpha/\Delta^2,$$

$$G_x=(1+\mu)+\alpha\beta\mu^2A'(x)/\Delta^2,$$

$$G_{x\mu}=1+2\alpha\beta\mu A'(x)/\Delta^3,$$

$$G_{xx}=\alpha\beta\mu^2[A''(x)/\Delta^2-2\beta\mu(A'(x))^2/\Delta^3].$$

此外，对 $x>-1$, $\gamma>0$, 有

$$A(x)=\exp[-\gamma x/(1+x)]>0,$$

$$A'(x)=-\gamma A(x)/(1+x)^2<0,$$

$$A''(x)=[\gamma^2+2\gamma(1+x)]A(x)/(1+x)^4>0.$$

由(10.13)的第四式，求得

$$\alpha=x\Delta^2. \tag{10.14}$$

代入(10.13)的第五式，并利用 Δ 的表达式，有

$$\beta\mu(A+2xA')=1. \tag{10.15}$$

再由(10.13)的第三式，有

$$\beta\mu(2A'^2-AA'')=A''. \tag{10.16}$$

由(10.15)和(10.16)，得到

$$A'+xA''=0, \tag{10.17}$$

即

$$x^2+\gamma x-1=0. \tag{10.18}$$

当 $\gamma>0$ 时，(10.18)有唯一解 x_0，满足 $x_0>0$.

把(10.14)代入(10.13)的第二式，有

$$\beta\mu xA'=-\frac{1+\mu}{\mu}. \tag{10.19}$$

将(10.15)与(10.19)相除，并令 $x=x_0$，有

$$\mu_0=-\frac{A(x_0)+2x_0A'(x_0)}{A(x_0)+x_0A'(x_0)}. \tag{10.20}$$

代入(10.15)，可得

$$\beta_0=\frac{A(x_0)+x_0A'(x_0)}{[A(x_0)+2x_0A'(x_0)]^2}. \tag{10.21}$$

在(10.14)中，令 $x=x_0$，有

$$\alpha_0=x_0[1+\beta_0\mu_0A(x_0)]^2. \tag{10.22}$$

最后，把上面结果代入(10.13)的第一式，有

$$\eta_0=(1+\mu_0)x_0-\alpha_0\mu_0/(1+\beta_0\mu_0A(x_0)). \tag{10.23}$$

这样便得到唯一解 $z_0=(x_0,\ \mu_0,\ \alpha_0,\ \beta_0,\ \eta_0)$.

记 $\Delta_0=1+\beta_0\mu_0A(x_0)$. 容易计算在 z_0 处有

$$G_{\mu\mu}|_{z_0}=\frac{2\alpha_0\beta_0A(x_0)}{\Delta_0^3}>0, \tag{10.24}$$

这是因为当 $\gamma>8.3$ 时，可证 α_0、β_0、μ_0 和 $A(x_0)$、Δ_0 都大于 0. 此外，在 z_0 处还有

$$G_{xxx}|_{z_0}=\frac{\alpha_0\beta_0\mu_0^2[\Delta_0A'''(x_0)-3\beta_0\mu_0A'(x_0)A''(x_0)]}{\Delta_0^3}>0. \tag{10.25}$$

这里已用到在该处 $G_{xx}=0$ 的条件. 因此，根据表 9.1 的识别条件，$g(x,\ \mu)\equiv G(x,\ \mu,\ \alpha_0,\ \beta_0,\ \eta_0)$ 在奇异点 $(x_0,\ \mu_0)$ 附近与 $h(x,\ \mu)=x^3+\mu^2$ 强等价.

我们把 $G(x,\ \mu,\ \alpha,\ \beta,\ \eta)$ 作为 $g(x,\ \mu)$ 在 $(x_0,\ \mu_0)$ 附近的 3-参数开折，现在证明 G 是 g 的一个普适开折. 根据表 9.2 第 8 行的普适开折识别条件，只需证明矩阵(注意到在 z_0 处 $G_{x\mu}$ 等于 0)

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu} \\ 0 & 0 & G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x} \\ G_\alpha & G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_\beta & G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \\ G_\eta & G_{\eta x} & G_{\eta\mu} & G_{\eta xx} & G_{\eta\mu x} \end{pmatrix} \tag{10.26}$$

在 z_0 处的行列式不等于 0. 在 B 的第 5 行中，除 $G_\eta=-1$ 外，其他

元素均为 0，故

$$\det \boldsymbol{B} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu} \\ 0 & G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x} \\ G_{\alpha x} & G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \\ G_{\beta x} & G_{\beta\mu} & G_{\beta xx} & G_{\beta\mu x} \end{pmatrix}. \tag{10.27}$$

容易计算，在(10.27)的第 2 和 4 行的元素中有

$$\frac{G_{\mu\mu}}{G_{\beta\mu}} = \frac{G_{\mu xx}}{G_{\beta xx}} = \frac{G_{\mu\mu x}}{G_{\beta\mu x}} = \frac{\beta}{\mu}. \tag{10.28}$$

把(10.27)的第 2 行乘以 $-\mu/\beta$，再加到第 4 行，就可使第 4 行的后三个元素变为 0，从而

$$\det \boldsymbol{B} = -G_{\beta x} \det\begin{pmatrix} 0 & G_{xxx} & G_{xx\mu} \\ G_{\mu\mu} & G_{\mu xx} & G_{\mu\mu x} \\ G_{\alpha\mu} & G_{\alpha xx} & G_{\alpha\mu x} \end{pmatrix}. \tag{10.29}$$

考虑到 $G_{\beta x} = \alpha\mu^2[1-\beta\mu A(x)]A'(x)/\Delta^3$，利用前面的结果，可知 $G_{\beta x}|_{x_0} \neq 0$。再证明 (10.29) 中的行列式不为 0。注意到在 x_0 处有

$$G_{\beta xx}|_{x_0} = \alpha_0^{-1} G_{xx}|_{x_0} = 0, \tag{10.30}$$

因此该行列式等于

$$G_{xxx}(G_{\mu\mu x}G_{\alpha\mu} - G_{\mu\mu}G_{\alpha\mu x}) - G_{xx\mu}^2 G_{\alpha\mu}. \tag{10.31}$$

容易计算 G 的其他几个导数

$$\begin{aligned} G_{\alpha\mu} &= -1/\Delta^2, \\ G_{\alpha\mu x} &= 2\beta\mu A'(x)/\Delta^3, \\ G_{\mu\mu x} &= 2\alpha\beta[1-2\beta\mu A(x)]A'(x)/\Delta^4. \end{aligned} \tag{10.32}$$

因为 $G_{\alpha\mu}|_{x_0} < 0$，并由(10.24)，有

$$(G_{\mu\mu x}G_{\alpha\mu} - G_{\mu\mu}G_{\alpha\mu x})|_{x_0} = -2\alpha_0\beta_0 A'(x_0)/\Delta_0^6 > 0.$$

由(10.25)，有 $G_{xxx}|_{x_0} > 0$。所以，在 x_0 处该行列式大于 0。综合上面结果，便有 $\det\boldsymbol{B}|_{x_0} \neq 0$。

由于 $g(x, \mu)$ 在 (x_0, μ_0) 附近与 $h(x, \mu) = x^3 + \mu^2$ 强等价，它们的普适开折就有相应的持久分岔图。图 10-4 给出在 $(x_0, \mu_0, \alpha_0, \beta_0, \eta_0)$ 附近 $G(x, \mu, \alpha, \beta, \eta)$ 的主要分岔图类型，(1) 是对

$g(x, \mu) = G(x, \mu, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$给出的双翼尖点分岔图，(ii)～(viii)是七种持久分岔图．它们描述了 CSTR 系统(3.10)的平衡态可能出现的主要静态分岔性态．

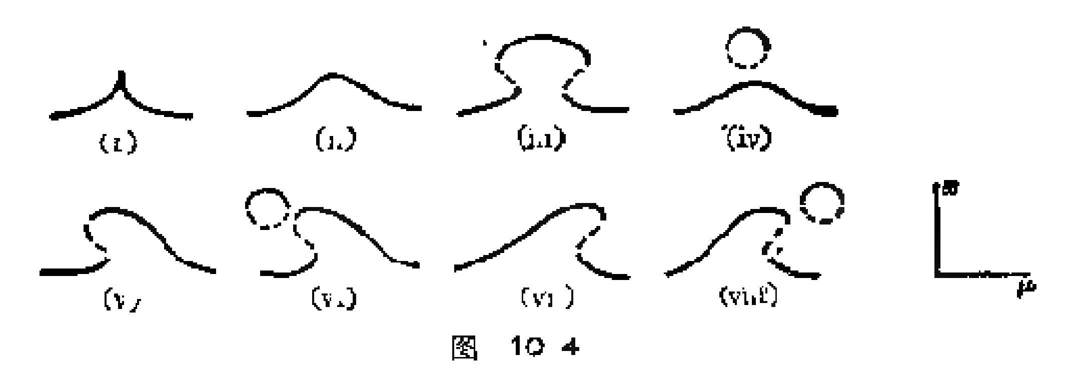


图 10.4

关于奇异性理论在化学反应器的分岔研究中的更多应用，可参看[55]．

§10.3 反应-扩散系统

我们着重讨论§3中的布鲁塞尔振子系统(3.22)的静态分岔问题．设空间是一维的，空间坐标为 x．取平衡状态 $X = X(x), Y = Y(x)$，它由静态方程

$$\begin{cases} -D_1X'' - A + (B+1)X - X^2Y = 0, \\ D_2Y'' - BX + X^2Y = 0 \end{cases} \tag{10.33}$$

确定．我们考虑(10.33)在区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上的解，并取边界条件

$$X(0) = X(l) = A, \quad Y(0) = Y(l) = B/A. \tag{10.34}$$

显然，这时有一个空间均匀(即与 x 无关)的解

$$X = A, \quad Y = B/A. \tag{10.35}$$

下面取(10.35)作为基本解，去研究空间非均匀的静态分岔解．引入新变量

$$u = X - A, \quad v = Y - B/A, \tag{10.36}$$

方程(10.33)成为

$$\Phi(u, v, B) = L\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + N(u, v) = 0, \tag{10.37}$$

其中

$$\mathfrak{L}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\0 & D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u''\\v''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B-1 & A^2\\-B & -A^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\tag{10.38}$$

$$N(u,\ v)=\left(\frac{B}{A}u^2+2Auv+u^2v\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\tag{10.39}$$

分别为 F 中的线性和非线性部分. 这里取 B 作为分岔参数, D_1、D_2、A 为常数. 边界条件(10.34)成为

$$u(0)=u(l)=0,\qquad v(0)=v(l)=0,\tag{10.40}$$

空间均匀解(10.35)成为 $u=0$, $v=0$. 显然, 有

$$\mathfrak{L}=D_{(u,v)}\Phi(0,\ 0,\ B).$$

为了确定零空间 $\mathcal{N}(\mathfrak{L})$, 考虑线性方程

$$\mathfrak{L}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0\tag{10.41}$$

在边界条件(10.40)下的非平凡解, 即 $\mathfrak{L}$ 的零特征值问题. 直接计算得知, 当

$$B=B_m=1+\frac{D_1}{D_2}A^2+\frac{l^2}{m^2\pi^2}\frac{A^2}{D_2}+\frac{m^2\pi^2}{l^2}D_1,\qquad m\in\mathbb{N}\tag{10.42}$$

时, (10.41)有满足边界条件(10.40)的非平凡解

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=c\sin\varkappa x\begin{pmatrix}D_2\varkappa^2\\1-D_1\varkappa^2\end{pmatrix},\tag{10.43}$$

其中 $\varkappa=m\pi/l$, c 为非零常数. 由此可见, 当 $B=B_m$ 时, 算子 $\mathfrak{L}$ 有零特征值, 相应的特征函数为(10.43). 即当 $B=B_m$ 时, 算子 $\mathfrak{L}$ 有由(10.43)张成的非空零空间 $\mathcal{N}(\mathfrak{L})$. 因此 $(0, 0, B_m)$ 是函数 $\Phi(u,\ v,\ B)$ 的奇异点($m\in\mathbb{N}$). 图 10-5 给出 B_m 的变化曲线. 根据线性稳定性定理(见附录第 156 页), 由于当 $B=B_m$ 时 $\mathfrak{L}$ 有零特征值, 故基本

图 10-5

解$(u, v)=(0, 0)$(作为系统(3.21)的平衡解)处于线性稳定性的临界状态，即B_m曲线是基本解的线性稳定性的临界曲线。当$B>B_m$时，解$(u, v)=(0, 0)$是不稳定的。记$B_c=\min\{B_m: m\in\mathbb{N}\}$，它是基本解失稳的最小$B$值。这里只考虑$B_c$只对应一个正整数$m_c$的情形，此时$\mathfrak{L}$有单重零特征值，$\mathcal{N}(\mathfrak{L})$是一维的。我们讨论方程(10.37)在奇异点$(0, 0, B_c)$处从基本解产生的静态分岔。

记$\boldsymbol{w}=(u, v)^T$，$\mu=B-B_c$，方程(10.37)成为

$$F(\boldsymbol{w}, \mu)\equiv\Phi(u, v, \mu+B_c)=\mathbf{0}. \qquad (10.44)$$

显然，$(\mathbf{0}, 0)$是$F(\boldsymbol{w}, \mu)$的一个奇异点。我们将在该处讨论静态分岔。先在$(\mathbf{0}, 0)$附近对方程(10.44)用LS方法进行约化。取函数空间

$$\mathscr{X}=\{\boldsymbol{w}\in C^2(0, l)\,|\,\boldsymbol{w}(0)=\boldsymbol{w}(l)=\mathbf{0}\}, \quad \mathscr{Y}=C^0(0, l).$$

记$\mathfrak{L}_0=D_wF(\mathbf{0}, 0)=\mathfrak{L}|_{B=B_c}$。由上面知道，$\mathfrak{L}_0$的单重零特征值对应的一个特征函数是

$$\boldsymbol{w}_1=\sin\varkappa_0x\begin{pmatrix} D_2\varkappa_0^2 \\ -1-D_1\varkappa_0^2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1\end{pmatrix}, \qquad (10.45)$$

其中$\varkappa_0=m_c\pi/l$。于是$\mathcal{N}(\mathfrak{L}_0)$是由$\boldsymbol{w}_1$张成的一维子空间，即$\mathcal{N}(\mathfrak{L}_0)=\{\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{w}_1: a\in\mathbb{R}\}$。在空间$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$中定义内积

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle=\int_0^l\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)d\xi, \qquad \forall\varphi_1、\varphi_2\in\mathscr{X}(\text{或}\ \mathscr{Y})$$

并取空间的正交分解：

$$\mathscr{X}=\mathcal{N}(\mathfrak{L}_0)\oplus\mathcal{N}(\mathfrak{L}_0)^{\perp}, \quad \mathscr{Y}=\mathscr{R}(\mathfrak{L}_0)\oplus\mathscr{R}(\mathfrak{L}_0)^{\perp}.$$

根据弗雷德霍姆定理，有$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_0)^{\perp}=\mathcal{N}(\mathfrak{L}_0^*)$，其中$\mathfrak{L}_0^*$是$\mathfrak{L}_0$的伴随算子。直接计算得知

$$\mathfrak{L}_0^*\boldsymbol{w}=-\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix}\boldsymbol{w}''-\begin{pmatrix} B_c-1 & B_c \\ A^2 & -A^2\end{pmatrix}\boldsymbol{w}. \qquad (10.46)$$

方程$\mathfrak{L}_0^*\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$的一个解(即$\mathfrak{L}_0^*$的零特征值对应的一个特征函数)是

$$\boldsymbol{w}_1^*=\sin\varkappa_0x\begin{pmatrix} 1+\varkappa_0^2D_2/A^2 \\ 1\end{pmatrix}. \qquad (10.47)$$

因此有 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_0)^{\perp}=\mathscr{N}(\mathfrak{L}_0^*)=\{w=aw_1^*|a\in\mathbb{R}\}$. 按照通常的 LS 方法，我们最后得到一维的分岔方程（参看(6.11)）：

$$g(\xi,\mu)\equiv\langle w_1^*,\ F(\xi w_1+W(\xi w_1,\ \mu),\ \mu)\rangle=0,\quad \xi\in\mathbb{R} \tag{10.48}$$

当然，我们无法求出函数 W，从而也不知道函数 g 的具体表达式，但可以利用 F 的导数去计算 g 的导数，再用奇异性理论进行分岔分析.

注意到对一切 $\mu\in\mathbb{R}$，$w=0$ 始终是方程(10.44)的解，由 § 6 知道 g 的导数计算可以大大简化. 现在把在$(0,\ 0)$ 处的一些结果列出：

1. $g=g_\xi=g_\mu=0.$ $\qquad$ (10.49)

2. $g_{\xi\xi}=\langle w_1^*,\ D^2F(w_1,\ w_1)\rangle.$

直接计算，得到

$$D^2F(w_1,\ w_1)=2\left(\frac{B_c}{A}u_1^2+2Au_1v_1\right)\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},$$

其中 u_1、v_1 由(10.45)给出. 此外，我们把(10.42)的函数 B_m 当 m 连续地变化（不只取正整数值！）时的极小值 $\bar{B}$ 和相应的 $\bar{m}$（见图 10.5）近似地作为 B_c 和 m_c，即取

$$B_c\approx\bar{B}=1+D_1A^2/D_2+2A\sqrt{D_1/D_2},$$
$$m_c\approx\bar{m}=(l/\pi)(A^2/D_1D_2)^{1/4},$$

利用上述结果，便可求出

$$g_{\xi\xi}\approx\frac{2D_2}{A}\left(A^2-\frac{D_2}{D_1}\right)\int_0^l\sin^3\varkappa_0x\,dx. \tag{10.50}$$

3. $g_{\xi\mu}=\langle w_1^*,\ (DF_\mu)\cdot w_1\rangle.$

直接计算，得到

$$(DF_\mu)\cdot w_1=\begin{pmatrix}-1&0\\ 1&0\end{pmatrix}w_1=u_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

类似上面那样，可以求出

$$g_{\xi\mu}\approx-\frac{D_2}{D_1}\int_0^l\sin^2\varkappa_0x\,dx=-\frac{lD_2}{2D_1}. \tag{10.51}$$

4. $g_{\xi\xi\xi}=\langle w_1^*, D^3F(w_1, w_1, w_1)-3D^2F(w_1, w_2)\rangle$, (10.52)
其中 $w_2=\mathfrak{L}_0^{-1}PD^2F(w_1, w_1)$，$P$ 是从$\mathscr{Y}$ 到$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_0)$的投影算子.

下面进行奇异性分析. 分两种情形讨论:

1. m_c 是奇数

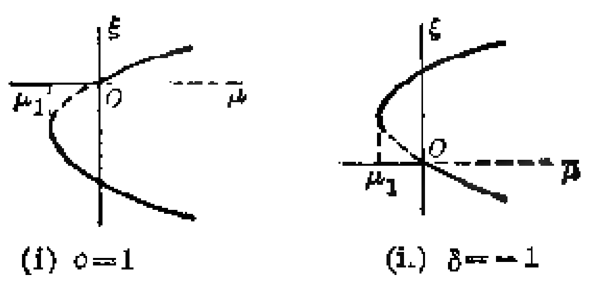
利用(10.49)～(10.51)，便得知在(0, 0)处有

$$g=g_\xi=g_\mu=0,$$

$$g_{\xi\mu}<0,$$

$$g_{\xi\xi}=(8/3)D_2(A^2-D_2/D_1)/\varkappa_0A. \quad (10.53)$$

记 $\delta=\operatorname{sgn} g_{\xi\xi}(0, 0)$. 根据表 9.1 给出的奇异性识别条件，我们由(10.53)知道，当 $A^2\neq D_2/D_1$(即 $\delta\neq0$)时，$g(\xi, \mu)$在(0, 0)附近强等价于GS 范式 $h(\xi, \mu)=\delta\xi^2-\mu\xi$，于是分岔方程(10.48)在(0, 0)处出现跨临界分岔(见图 10-6). 原来的静态方程(10.44)也应有同样的分岔情况；且由LS 方法知道，在(0, 0)附近，(10.44)的分岔解可写成 $w=\xi w_1+O(\xi^2)$的形式，这表明分岔解具有形如 $\sin(m_c\pi x/l)$的主部的空间周期结构.



(i) $\delta=1$　　(ii) $\delta=-1$

图 10-6

可以证明，存在μ的某个最小值μ_1，使得当$\mu<\mu_1$时，方程(10.44)只有唯一的零解 $w=0$. 因此，在图 10-6 上，分岔解曲线必定在μ_1处折返，即在μ_1处出现极限点分岔. 在该处出现的新的解一般是稳定的.

如果 $A^2=D_2/D_1$，这时 $g_{\xi\xi}=0$，我们就需要计算 g 的更高阶导数. 由(10.52)，并考虑到 m_c 为奇数时有 $D^2F(w_1, w_1)=0$，由(10.52)可求得在(0, 0)处

$$g_{\xi\xi\xi}=(9\pi/4)D_2\varkappa_0^2(1+D_1\varkappa_0^2)/A^2>0. \quad (10.54)$$

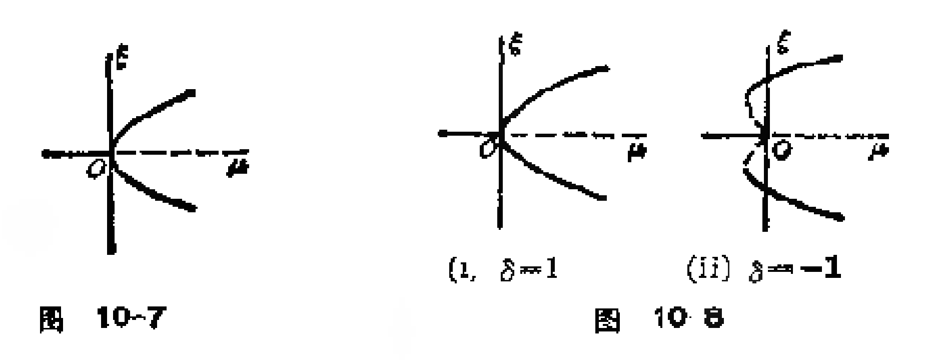
根据表 9.1，这时 $g(\xi,\mu)$ 在 $(0,0)$ 附近强等价于 GS 范式 $h(\xi,\mu)=\xi^3-\mu\xi$，从而在 $(0,0)$ 处出现超临界叉形分岔（见图 10-7）。

2．m_0 是偶数

利用 (10.49)～(10.51)，得知在 $(0,0)$ 处有

$$g=g_\xi=g_\mu=g_{\xi\xi}=0,\qquad g_{\xi\mu}<0. \tag{10.55}$$

因此，还需要考虑 $g_{\xi\xi\xi}$．当 m_0 为偶数时，用 (10.52) 去计算 $g_{\xi\xi\xi}$ 将涉及逆算子 L_0^{-1}，这就十分复杂，在此不作介绍．要指出的是，对于数 D_1、D_2 和 A 的不同数值，$g_{\xi\xi\xi}(0,0)$ 有可能取正值、负值或 0。



(i) $\delta=1$　　(ii) $\delta=-1$

图 10-7　　图 10-8

记 $\delta=\operatorname{sgn} g_{\xi\xi\xi}(0,0)$．根据表 9.1，如果 $g_{\xi\xi\xi}(0,0)\neq0$，则 $g(\xi,\mu)$ 在 $(0,0)$ 附近强等价于 GS 范式 $h(\xi,\mu)=\delta\xi^3-\mu\xi$．于是 $\delta=1$ 对应超临界叉形分岔、$\delta=-1$ 对应亚临界叉形分岔（见图 10-8）．分岔解同样有形如 $\sin(m_0\pi x/l)$ 的主部．当 $\delta=-1$ 时，分岔解曲线同样出现折返现象．如果 $g_{\xi\xi\xi}(0,0)=0$，我们还要考虑 g 的更高阶导数，才能讨论该处的分岔性态．

上面研究了 $\mathfrak{L}_0$ 有单重零特征值（即 B_0 只对应一个正整数 m_0）情形的静态分岔．然而，在参数 D_1、D_2 和 A 的某些数值下，$\mathfrak{L}_0$ 可能有二重零特征值（即 B_0 对应两个正整数 m_1 和 $m_2=m_1+1$），此时 $\mathscr{N}(\mathfrak{L}_0)$ 是二维的，上述分岔分析结果不再成立．在多重特征值情形中，系统通常有一定的对称性，我们可用群论方法来研究对称分岔问题（参看 § 11）．此外，多重特征值情形是退化的，适当的小扰动会使多重特征值分裂成相近的多个单重特征值，我们也可用摄动法去讨论扰动系统的分岔．研究结果表明，当 $\mathfrak{L}_0$ 有二

重零特征值时,扰动系统不仅有形如 $\sin(m_1\pi x/l)$ 和 $\sin(m_2\pi x/l)$ 的主部的一级分岔解,而且在一定条件下还有形如 $c_1\sin(m_1\pi x/l)+c_2\sin(m_2\pi x/l)$ 的主部的二级分岔解,即扰动系统可能出现单模态和双模态的复杂空间结构。

布鲁塞尔振子系统是一类典型的二阶反应-扩散系统,其空间结构是通过扩散稳定性与化学不稳定性之间的竞争而形成的。如果扩散过程由凯恩-希里亚特广义扩散定律(见(3.20))支配,扩散过程可能是稳定或不稳定的。由此建立的四阶反应-扩散系统中,可能存在扩散稳定性与化学不稳定性之间的竞争,也可能存在扩散不稳定性与化学稳定性之间的竞争。因此,凯恩-希里亚特广义扩散机理进一步扩展了耗散结构理论的研究与应用范围。研究表明[56]~[58],四阶反应-扩散系统有着比二阶反应-扩散系统更丰富的分岔现象和更复杂的空间结构。特别地,即使单个四阶反应-扩散方程给出的系统,也有多种形式的二次分岔,即在单组分的情形下亦会出现各种多模态的空间结构。

§11 有对称性的静态分岔

许多自然现象具有不同对称性,它们会反映到数学模型上来。此外,在处理数学模型过程中,有时也会遇到意想不到的对称性。分岔性态不仅与参数改变有关,而且受到系统本身的对称性影响。因此有对称性与无对称性的系统的(静态或动态)分岔有重要的差别。虽然在具体系统的分岔研究中,我们可以不考虑对称性而一般地讨论分岔性态,但这样做就无法区分到底哪些性质与系统的对称性无关,哪些性质是由对称性引起的,也就无从利用对称性去统一处理和简化分岔分析。有对称性的分岔理论包含丰富的内容,涉及多方面的数学方法。本节先引进对称性的一些概念,然后介绍有对称性的静态分岔问题的等变奇异性理论,最后讨论对称性破缺问题。

§11.1 对称性概念

对称性是指系统在某些变换作用下保持其结构的性质. 这些变换的集合往往构成一个群. 因此, 群论方法是处理对称性问题的主要工具. 这里主要用到作用在 $\mathbb{R}^n$ 上的紧李群.

记 $GL(n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的全体可逆线性变换组成的群, 即全体非奇异的 $n\times n$ 实矩阵按矩阵乘法组成的群. $GL(n)$ 中的有界闭子群称为紧李群. 下面举出几个常见的例子.

[例 1] n 维正交群 $O(n)=\{A\in GL(n)\mid AA^T=I\}$.

[例 2] n 维旋转群(特殊正交群)是正交群的子群, 它由 $SO(n)=\{A\in O(n)\mid \det A=1\}$ 给出. 当 $n=2$ 时, $SO(2)$ 由平面旋转矩阵

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \tag{11.1}$$

组成. 因此, 通过对应关系 $R_\theta\mapsto\theta$, $SO(2)$ 等同于圆周群 S^1. 记 $\kappa=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 为翻转, 则 $O(2)$ 可由 $SO(2)$ 和 κ 生成.

[例 3] $\mathbb{R}^2$ 上的 m 阶循环群 $Z_m=\{R_{2k\pi/m}\mid k=0, 1, \cdots, m-1\}$, 它是 $O(2)$ (或 $SO(2)$)的有限子群. 特别地, $Z_2=\{I, \kappa\}$, 其中 I 为恒等变换.

[例 4] $\mathbb{R}^3$ 上的 $2m$ 阶两面体群 D_m 是由 Z_m 和翻转 κ 生成的($m\geqslant 3$), 它是 $O(2)$ 的有限子群. D_m 在几何上反映正 m 边形的对称性.

[例 5] n 维环面群 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$ (共 n 个), 即 $\theta\in T^n$ 等同于 $GL(2n)$ 的元素

$$\begin{pmatrix}R_{\theta_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & R_{\theta_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & R_{\theta_n}\end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

设 Γ 是一个紧李群，$\mathscr{V}$ 是一个有限维向量空间，$GL(\mathscr{V})$ 是 $\mathscr{V}$ 上的全体可逆线性变换组成的群. 如果存在映射 $\rho: \Gamma\to GL(\mathscr{V})$，$\gamma\mapsto\rho_\gamma$，且保持群的乘法规律不变，即有

$$\rho_{\gamma_1\gamma_2}(v)=\rho_{\gamma_1}\rho_{\gamma_2}(v), \quad \forall\gamma_1, \gamma_2\in\Gamma, v\in\mathscr{V} \tag{11.3}$$

则称 ρ 是紧李群 Γ 到空间 $\mathscr{V}$ 上的一个线性表示†，$\mathscr{V}$ 称为表示空间. $\{\rho_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ 称为 Γ 对 $\mathscr{V}$ 的一个作用. 为方便起见，下面经常将 $\rho_\gamma(v)$ 简记为 γv.

[例 1] 取 $\mathscr{V}=\mathbb{R}^n$. 因为每个紧李群 Γ 都是 $GL(n)$ 中的矩阵子群，所以我们可以自然地利用 $\rho_\gamma(x)=\gamma\cdot x$（其中 $\gamma\in\Gamma$，$x\in\mathbb{R}^n$）去定义 Γ 对 $\mathbb{R}^n$ 的一种作用. 此外，还可以通过 $\rho_\gamma(x)=x$ 给出 Γ 对 $\mathbb{R}^n$ 的另一种作用（平凡作用）.

[例 2] 取 $\mathscr{V}=\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$. 对每个整数 k，我们可以通过

$$\theta z=e^{ik\theta}z, \qquad \forall\theta\in S^1, z\in\mathbb{C}$$

去定义圆周群 S^1（即 $SO(2)$）对 $\mathbb{C}$ 的作用. 特别地，当 $k=0$ 时，它对应平凡作用；当 $k=1$ 时，它对应转角为 θ 的平面旋转.

[例 3] 取 $\mathscr{V}=\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$. 2 维正交群 $O(2)$ 对 $\mathbb{C}$ 的一种作用可由例 2 中 S^1 对 $\mathbb{C}$ 的作用与翻转

$$\kappa z=\bar{z}, \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$

共同给出.

在实际问题中，如果 $\mathscr{V}$ 是具有某种对称性的物理系统的状态空间，那么就可以引进相应的群的作用. 例如均匀直杆的平面屈曲问题中，杆件可能向上或向下变形，故可引进群 Z_2 的作用，即此问题有 Z_2 对称性；但是如果直杆可在三维空间中屈曲，则有 $O(2)$ 对称性. 又如矩形平板的屈曲可引进 $Z_2\oplus Z_2$ 对称性；正方形平板的屈曲可引进 D_4 对称性；而正三角形平板的屈曲有 D_3 对称性.

设 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是两个向量空间，紧李群 Γ 同时作用在 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 上. 如果存在一个（线性）同构 $A: \mathscr{V}\to\mathscr{W}$，使得

† 亦称 ρ 是从 Γ 到 $GL(\mathscr{V})$ 的一个同态映射.

$$A(\gamma v)=\gamma(Av), \qquad \forall\gamma\in\Gamma,\ v\in\mathscr{V} \quad (11.4)$$

则称 Γ 对 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 的作用是同构的，或称空间 $\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是 Γ 同构的。

设紧李群 Γ 作用在向量空间 $\mathscr{V}$ 上。如果子空间 $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}$ 满足 $\gamma w\in\mathscr{W}$，$\forall\gamma\in\Gamma$，$w\in\mathscr{W}$，则称 $\mathscr{W}$ 是 Γ **不变的**。如果在 V 中，Γ 不变子空间只有 $\{0\}$ 和 $\mathscr{V}$，则称 Γ 对 $\mathscr{V}$ 的作用是**不可约的**。如果 $\mathscr{V}$ 上的线性变换中，只有 aI（I 为恒等变换，$a\in\mathbb{R}$）可与任何 $\gamma\in\Gamma$ 交换，则称 Γ 对 V 的作用是**绝对不可约的**。绝对不可约的作用必是不可约的，但反之不一定成立。例如，$\boldsymbol{SO}(2)$ 和 $\boldsymbol{O}(2)$ 对 $\mathbb{R}^2$ 的作用都是不可约的；$\boldsymbol{O}(2)$ 对 $\mathbb{R}^2$ 的作用是绝对不可约的，但 $\boldsymbol{SO}(2)$ 对 $\mathbb{R}^2$ 的作用不是绝对不可约的，因为形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$（其中 a、$b\in\mathbb{R}$）的矩阵也可与 $\boldsymbol{SO}(2)$ 交换。

如果子空间 $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}$ 是 Γ 不变的，且 Γ 对 $\mathscr{W}$ 的作用是不可约的，则称 $\mathscr{W}$ 是 Γ **不可约的**。可以证明，若 Γ 是作用在 $\mathscr{V}$ 上的紧李群，则存在 $\mathscr{V}$ 的 Γ 不可约子空间 $\mathscr{V}_1$，…，$\mathscr{V}_s$，使得 $\mathscr{V}=\mathscr{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathscr{V}_s$。

设 Γ 是作用在 $\mathscr{V}$ 上的紧李群。如果实值函数 $f:\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(\gamma v)=f(v)$，$\forall\gamma\in\Gamma$，$v\in\mathscr{V}$，则称 f 为 Γ **不变函数**。如果映射 $g:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ 满足 $g(\gamma v)=\gamma g(v)$，$\forall\gamma\in\Gamma$，$v\in\mathscr{V}$，则称 g 为 Γ **等变映射**，或称"g 可与 Γ 交换"。考虑 $\mathscr{V}$ 上的微分方程给出的系统

$$du/dt=F(u), \qquad u\in\mathscr{V} \quad (11.5)$$

如果向量场 $F(u)$ 是 Γ 等变的，则称(11.5)**有对称群 Γ**。此时若 u 是(11.5)的解，则对任何 $\gamma\in\Gamma$，γu 也是(11.5)的解。这是因为

$$\frac{d(\gamma u)}{dt}=\frac{\gamma\,du}{dt}=\gamma F(u)=F(\gamma u).$$

在进行局部分岔分析时，我们只需考虑在原点的邻域内的芽（见§9.1）。取 $\mathscr{V}=\mathbb{R}^n$，类似前面那样可建立 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的 Γ 不变芽

函数和$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$的$\Gamma$等变芽映射的概念，并将它们组成的集合分别记作$\mathscr{E}_n(\Gamma)$和$\vec{\mathscr{E}}_n(\Gamma)$. 此外，记$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$的全体芽函数集合为$\mathscr{E}_n$. 下面的结果表明，$\mathscr{E}_n(\Gamma)$和$\vec{\mathscr{E}}_n(\Gamma)$的元素均可通过某些其他元素表示.

根据施瓦兹(H. A. Schwarz)定理[9]，存在有限个Γ不变多项式函数$u_1(\boldsymbol{x})$, $\cdots$, $u_s(\boldsymbol{x})$(这里$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$)，使得每个$f\in\mathscr{E}_n(\Gamma)$都可以表示成

$$f(\boldsymbol{x})=h(u_1(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ u_s(\boldsymbol{x})),\tag{11.6}$$

其中$h\in\mathscr{E}_s$. 类似地，存在有限个Γ等变多项式映射$g_1(\boldsymbol{x})$, $\cdots$, $g_r(\boldsymbol{x})$(这里$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$)，使得每个$g\in\vec{\mathscr{E}}_n(\Gamma)$都可以表示成

$$g(\boldsymbol{x})=f_1g_1+\cdots+f_rg_r,\tag{11.7}$$

其中f_1, $\cdots$, $f_r\in\mathscr{E}_n(\Gamma)$.

[例1] 设$\boldsymbol{Z}_2=\{\pm1\}$作用在$\mathbb{R}$上，则$f\in\mathscr{E}_1(\boldsymbol{Z}_2)$可表示成$f(x)=h(u)$，其中$u=x^2$(其中$x\in\mathbb{R}$)，$h\in\mathscr{E}_1$; $g\in\vec{\mathscr{E}}_1(\boldsymbol{Z}_2)$可表示成$g(x)=p(u)x$，其中$p\in\mathscr{E}_1$.

[例2] 设$\boldsymbol{S}^1$作用在复平面$\mathbb{C}(\simeq\mathbb{R}^2)$上，即对$\theta\in\boldsymbol{S}^1$, $z\in\mathbb{C}$，令$\theta z=e^{i\theta}z$. 于是$f\in\mathscr{E}_2(\boldsymbol{S}^1)$可表示成$f(z)=h(u)$，其中$u=z\bar{z}$，$h\in\mathscr{E}_1$; $g\in\vec{\mathscr{E}}_2(\boldsymbol{S}^1)$可表示成$g(z)=p(u)z+q(u)iz$，其中$p$、$q\in\mathscr{E}_1$.

[例3] 设$\boldsymbol{O}(2)$作用在$\mathbb{C}$上，则$f\in\mathscr{E}_2(\boldsymbol{O}(2))$可表示成$f(z)=h(u)$，其中$u=z\bar{z}$，$h\in\mathscr{E}_1$; $g\in\vec{\mathscr{E}}_2(\boldsymbol{O}(2))$可表示成$g(z)=p(u)z$，其中$p\in\mathscr{E}_1$.

[例4] 设$\boldsymbol{D}_n$作用在$\mathbb{C}$上，则$f\in\mathscr{E}_2(\boldsymbol{D}_n)$可表示成$f(z)=h(u,\ v)$，其中$u=z\bar{z}$，$v=z^n+\bar{z}^n$，$h\in\mathscr{E}_2$; $g\in\vec{\mathscr{E}}_2(\boldsymbol{D}_n)$可表示成$g(z)=p(u,\ v)z+q(u,\ v)\bar{z}^{n-1}$，其中$p$、$q\in\mathscr{E}_2$.

§11.2 等变奇异性理论

等变奇异性理论是研究有对称性的静态分岔的有效方法. 设Γ是紧李群. 考虑巴拿赫空间$\mathscr{X}$(包括有限维的欧氏空间)中有

对称群 Γ 的静态分岔问题

$$F(u, \mu)=0, \qquad u\in\mathscr{X},\ \boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^m \quad (11.8)$$

其中 F 是 Γ 等变的，即满足 $F(\gamma u, \mu)=\gamma F(u, \mu)$, $\forall\gamma\in\Gamma$. 不失一般性，设 $F(0, \mathbf{0})=0$. 如果 $(0, \mathbf{0})$ 是 F 的一个奇异点，并记导算子 $D_uF(0,\mathbf{0})=\mathfrak{L}$，则 $\mathfrak{L}$ 有零特征值，即一般地有 $n=\dim\mathscr{N}(\mathfrak{L})\geqslant 1$. 可以证明[6]，对于有对称性的分岔问题(11.8)，$\mathfrak{L}$ 通常有多重零特征值，即 $n\geqslant 2$.

利用 LS 约化方法，可将(11.8)化为较低维数的分岔方程

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})=\mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^m \quad (11.9)$$

可以证明(见[8]的第七章§3)，经过 LS 约化后，得到的分岔方程的对称性保持不变，即 g 也是 Γ 等变的：

$$g(\gamma\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})=\gamma g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \qquad \forall\gamma\in\Gamma \quad (11.10)$$

且有 $g(\mathbf{0}, \mathbf{0})=0$; 此外，$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ 也是 g 的奇异点. 注意到在无对称性的情形中，$\mathfrak{L}$ 通常有单重零特征值，此时(11.9)是单变量分岔方程，而在有对称性的情形，$\mathfrak{L}$ 通常有多重零特征值，(11.9)就是多变量分岔方程. 下面讨论有限维对称分岔问题(11.9)的等变奇异性理论，特别是识别和普适开折问题.

设紧李群 Γ 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上. 记含单参数 $\mu\in\mathbb{R}$ 的从 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 Γ 不变芽函数集合为 $\mathscr{E}_{x,\mu}(\Gamma)$，并记从 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的 Γ 等变芽映射集合为 $\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$.

设 g、$h\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，且在 $(\mathbf{0}, 0)$ 的邻域内有：

$$g(\boldsymbol{x}, \mu)=S(\boldsymbol{x}, \mu)h(\varphi(\boldsymbol{x}, \mu), M(\mu)), \qquad (11.11)$$

其中 $\varphi\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$, $M\in\mathscr{E}_\mu$, S 是满足

$$S(\gamma\boldsymbol{x}, \mu)\gamma=\gamma S(\boldsymbol{x}, \mu) \qquad \forall\gamma\in\Gamma \quad (11.12)$$

的 $n\times n$ 矩阵值芽映射，它们满足 $\varphi(\mathbf{0}, 0)=\mathbf{0}$, $M(0)=0$, $M'(0)>0$, 且 $S(\mathbf{0},0)$, $D_x\varphi(\mathbf{0}, 0)\in\mathscr{L}_n(\Gamma)^0$，其中 $\mathscr{L}_n(\Gamma)^0$ 是 $\boldsymbol{GL}(n)$ 中与 Γ 可交换的矩阵集合中含单位矩阵的连通分支，则称 g 和 h 是 Γ 等价的，记作 $g\underset{\Gamma}{\sim}h$. 如果在(11.11)中 $M(\mu)\equiv\mu$，则称 g 和 h

是强 Γ 等价的，记作 $g \overset{\bullet}{\underset{\Gamma}{\sim}} h$. 显然，当 $g \overset{\bullet}{\underset{\Gamma}{\sim}} h$ 时，有 $g \underset{\Gamma}{\sim} h$.

对于 $g\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，定义 g 的 Γ 等变限制切空间 $RT(g,\ \Gamma)$ 和 Γ 等变切空间 $T(g,\ \Gamma)$ 如下：

$$RT(g,\ \Gamma)=\{Sg+(D_xg)\varphi \mid S \text{ 满足(11.12)},\ \varphi\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma),\ \varphi(0,\ 0)=0\},$$

$$T(g,\ \Gamma)=\{Sg+(D_xg)\varphi+Mg_\mu \mid S\text{ 满足 (11.12)},\ \varphi\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma),\ M\in\mathscr{E}_\mu\}.$$

显然，$RT(g,\ \Gamma)$ 和 $T(g,\ \Gamma)$ 都是 $\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$ 的子空间.

类似无对称分岔问题[†]那样，对 Γ 等变的对称分岔问题，可以证明（参看[9]的第十四章§1）：设 $g\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，并取子空间 $\mathscr{P}(g,\ \Gamma)\subset\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，使得对任何 $p\in\mathscr{P}(g,\ \Gamma)$，都有 $RT(g+p,\ \Gamma)=RT(g,\ \Gamma)$，则对任何 $p\in\mathscr{P}(g,\ \Gamma)$，$g+p$ 与 g 强 Γ 等价. 于是，g 的识别问题就归结为子空间 $\mathscr{P}(g,\ \Gamma)$ 的计算. 特别地，我们可以得到各种 Γ 等变 GS 范式的识别条件. 这里就 $\Gamma=\boldsymbol{Z}_2$ 作用在 $\mathbb{R}$ 上的情形举例说明之.

［例 1］ 设 $g(x,\ \mu)=r(u,\ \mu)x\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\boldsymbol{Z}_2)$，其中 $x\in\mathbb{R}$，$\mu\in\mathbb{R}$，$u=x^2$，$\boldsymbol{Z}_2=\{1,\ -1\}$. g 与 $h=(\varepsilon u^k+\delta\mu)x$（这里 $\varepsilon, \delta=\pm1$）强 $\boldsymbol{Z}_2$ 等价的充要条件是在 $(0,\ 0)$ 处有

$$r=\partial r/\partial u=\cdots=\partial^{k-1}r/\partial u^{k-1}=0$$

和
$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^k r}{\partial u^k}\right)=\varepsilon,\quad \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial r}{\partial \mu}\right)=\delta.$$

［例 2］ 设 $g(x,\ \mu)$ 同例 1，则 g 与 $h=(\varepsilon u+\delta\mu^k)x$ 强 $\boldsymbol{Z}_2$ 等价（这里 $\varepsilon,\ \delta=\pm1$）的充要条件是在 $(0,\ 0)$ 处有

$$r=\frac{\partial r}{\partial \mu}=\cdots=\frac{\partial^{k-1}r}{\partial \mu^{k-1}}=0.$$

和
$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)=\varepsilon,\quad \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^k r}{\partial \mu^k}\right)=\delta.$$

接着考虑 Γ 等价的对称分岔问题的对应解之间稳定性的关

† 参看§9.2. 此时可认为 Γ 是平凡的紧李群 1，它只包含恒等变换.

系. 下面指出，当(11.9)的解作为动态方程 $\dot{x}+g(x,\ \mu)=0$ 的平衡解时，其线性稳定性在 Γ 等价下通常保持不变. 设 Γ 绝对不可约地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上. g、$h\in\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，且有 Γ 等价关系(11.11). $(x_0,\ \mu_0)$ 是 g 的一个零点，$(X_0,\ M_0)=(\varphi(x_0,\ \mu_0),\ M(\mu_0))$ 是 h 的对应零点. 于是 $D_xg(x_0,\ \mu_0)$ 和 $D_Xh(X_0,\ M_0)$ 的对应特征值的实部同号，从而 $(x_0,\ \mu_0)$ 与 $(X_0,\ M_0)$ 有相同的线性稳定性.

对 $g\in\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，如果有 $G(x,\ \mu,\ \alpha)\in\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu,\alpha}(\Gamma)$，其中 $\alpha\in\mathbb{R}^k$，使得 $G(x,\ \mu,\ 0)=g(x,\ \mu)$，则称 G 为 g 的一个 **k 参数 Γ 开折**，α 是开折参数. 设 $G(x,\ \mu,\ \alpha)$ 和 $H(x,\ \mu,\ \beta)$ 分别为 g 的 k 和 l 参数 Γ 开折 $(\alpha\in\mathbb{R}^k,\ \beta\in\mathbb{R}^l)$，如果存在 $A(\beta)\in\mathscr{E}_\beta$，使得在 $(x,\ \mu,\ \beta)=(0,\ 0,\ 0)$ 的某邻域内有

$$H(x,\ \mu,\ \beta)=S(x,\ \mu,\ \beta)G(\varphi(x,\ \mu,\ \beta),\ M(\mu,\ \beta),\ A(\beta)), \tag{11.13}$$

其中 S 为满足

$$S(\gamma x,\ \mu,\ \beta)\gamma=\gamma S(x,\ \mu,\ \beta)\qquad \forall\gamma\in\Gamma$$

的 $n\times n$ 矩阵值芽映射，$\varphi\in\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu,\beta}(\Gamma)$，且有 $S(x,\ \mu,\ 0)=I$，$\varphi(x,\ \mu,\ 0)=x$，$M(\mu,\ 0)=\mu$，$A(0)=0$，则称"H 由 G 代理".

设 G 是 g 的一个 Γ 开折，如果 g 的任何 Γ 开折都可由 G 代理，则 G 是 g 的一个**普用 Γ 开折**. 具有最少开折参数的普用 Γ 开折称为**普适 Γ 开折**，其开折参数个数称为 g 的 **Γ 余维数**，记作 $\operatorname{codim}_\Gamma g$. 可以证明(参看[9] 的第十五章§2)，$g$ 的 Γ 余维数等于 Γ 等变切空间 $T(g,\ \Gamma)$ 在 $\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$ 中的余维数 k. 若 W 是 $T(g,\ \Gamma)$ 在 $\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$ 中的补空间，即 $\overline{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)=T(g,\ \Gamma)\oplus W$，取 W 的一组基向量 $\{p_1(x,\ \mu),\ \cdots,\ p_k(x,\ \mu)\}$，则

$$G(x,\ \mu,\ \alpha)=g(x,\ \mu)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_j p_j(x,\ \mu) \tag{11.14}$$

是 g 的一个普适 Γ 开折. 我们可以用(11.14)去计算普适 Γ 开折. 普适开折在退化分岔研究中有重要作用.

表 11.1 列出了当 Z_2 作用在 $\mathbb{R}$ 上时，Z_2 余维数不超过 1 的

Z_2 等变 GS 范式 $h(x,\ \mu)$ 的普适 Z_2 开折，其中 $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 以 $(0,\ 0)$ 为奇异点，$u=x^2$．更一般的结果可参看[8]的第六章§3．

表 11.1　Z_2 余维数不大于 1 的 Z_2 等变 GS 范式和普适 Z_2 开折

GS 范式	Z_2 余维数	普适 Z_2 开折	余维数	普适开折
$x^3-\mu x$	0	$(u-\mu)x$	2	$x^3-\mu x+\alpha_1+\alpha_2x^2$
$x^5-\mu x$	1	$(u^2-\mu+\alpha u)x$	4	$x^5-\mu x+\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\alpha_4\mu$
$x^3\pm\mu^2x$	1	$(u\pm\mu^2+\alpha)x$	5	$x^3\pm\mu^2x+(\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2)+(\alpha_4+\alpha_5x^2,\mu$

为了比较起见，在表 11.1 上还给出在无对称性（即 $\Gamma=\{1\}$）时这些 GS 范式的余维数和普适开折．可以见到，在有对称性时，余维数大大减少了，这是对称性限制了扰动的形式的缘故．特别地，在无对称性情形中，函数 $x^3-\mu x$ 在(0, 0)处的叉形分岔的余维数为 2，因此分岔是退化的，其分岔图会受到扰动而改变．然而，在有 Z_2 对称性情形中，$x^3-\mu x$ 的 Z_2 余维数为 0，因此对称分岔是通有的，其分岔性态不受有 Z_2 对称性的扰动而改变，即其普适 Z_2 开折就是它本身．

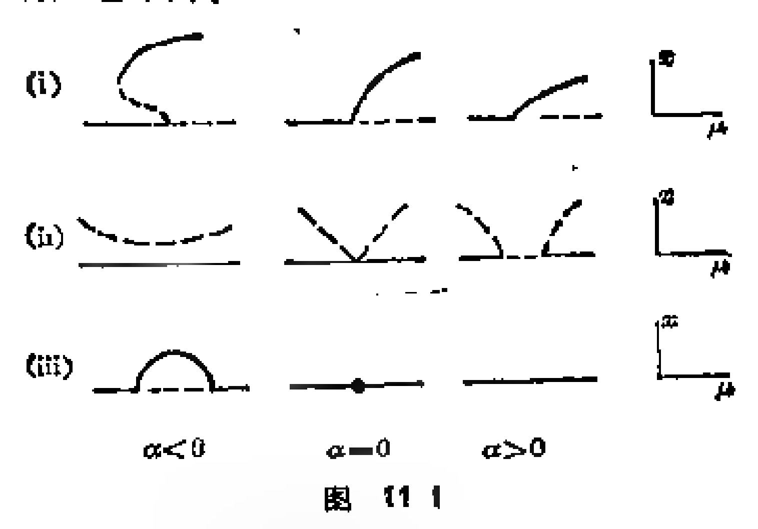


图 11-1

图 11-1(i)、(ii)和(iii)分别给出三个普适 Z_2 开折 $(u^2-\mu+\alpha u)x$、$(u-\mu^2+\alpha)x$ 和 $(u+\mu^2-\alpha)x$ 在(0, 0)附近的分岔图随开折参数 α 变化的情况．由于分岔问题有 Z_2 对称性，我们只画出 $x\geqslant$

0 的分岔图，对 $x\leqslant 0$ 亦有类似的结果。

§11.3 对称性破缺

设紧李群 Γ 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上。考虑在 $\mathbb{R}^n$ 上的(Γ 等变)单参数对称分岔问题

$$g(\boldsymbol{x},\ \mu)=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{11.15}$$

其中 $g\in\vec{\mathscr{E}}_{x,\mu}(\Gamma)$，即 g 满足 $g(\gamma\boldsymbol{x},\ \mu)=\gamma g(\boldsymbol{x},\ \mu)$，$\forall\gamma\in\Gamma$．不失一般性，设对一切 μ 有 $g(\boldsymbol{0},\ \mu)\equiv 0$，且 $(\boldsymbol{0},\ 0)$ 是 g 的一个奇异点，即 $D_x g(\boldsymbol{0},\ 0)$ 是奇异的．分岔问题的对称性破缺，是指分岔使得解的对称性程度减少．为了描述(11.15)的解的对称性程度，我们要引进迷向子群(isotropy subgroup)的概念。

对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，集合

$$\Gamma\boldsymbol{x}=\{\gamma\boldsymbol{x}\mid\gamma\in\Gamma\} \tag{11.16}$$

是过 $\boldsymbol{x}$ 的群轨道．如果 $\boldsymbol{x}$ 是(11.15)的解，由于 g 是 Γ 等变的，则群轨道 $\Gamma\boldsymbol{x}$ 上的任何点 $\gamma\boldsymbol{x}$ 也是(11.15)的解．对给定的 $\gamma\in\Gamma$，要区分两种情况：如果 $\gamma\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}$，我们就得到与 $\boldsymbol{x}$ 不同的解；如果 $\gamma\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，我们得到的其实是同一个解，这时称 γ 是解 $\boldsymbol{x}$ 的一种对称．在考虑(11.15)的解时，显然只需计及那些不是由对称性联系着的解。

对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，集合

$$\Sigma_x=\{\gamma\in\Gamma\mid\gamma\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\}\subset\Gamma \tag{11.17}$$

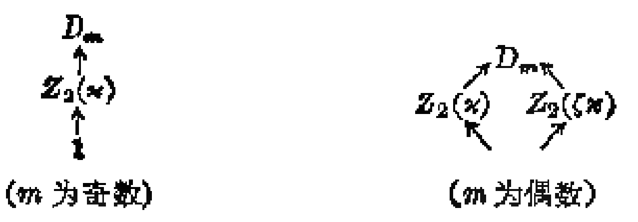
称为 $\boldsymbol{x}$ 的迷向子群．它可用来衡量在 Γ 作用下 $\boldsymbol{x}$ 的对称性程度．当 $\boldsymbol{x}$ 是(11.15)的解时，如果 Σ_x 越大，则 $\boldsymbol{x}$ 的群轨道 $\Gamma\boldsymbol{x}$ 越小，即在 $\Gamma\boldsymbol{x}$ 中包含的不同的解的数目越少。例如，对平凡解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，显然有 $\Sigma_0=\Gamma$，群轨道只含一个点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$．特别地，如果 Γ 是一个有限群，则由解 $\boldsymbol{x}$ 得到的所有不同的解的数目等于 $|\Gamma|/|\Sigma_x|$，其中 $|\cdot|$ 为群的阶(即所含元素的个数)．

容易证明，对于在 $\boldsymbol{x}$ 的群轨道上的点 $\gamma\boldsymbol{x}$ 的迷向子群，有

$$\Sigma_{\gamma x}=\gamma\Sigma_x\gamma^{-1},\qquad\forall\gamma\in\Gamma \tag{11.18}$$

若 Σ 是 Γ 的子群，$\gamma\in\Gamma$，则称 $\gamma\Sigma\gamma^{-1}=\{\gamma\sigma\gamma^{-1}|\sigma\in\Sigma\}$ 为 Σ 的一个共轭子群。(11.18)表明，在同一条群轨道上各点的迷向子群是共轭的。将 Γ 中的迷向子群 Σ 的共轭类定义为 $[\Sigma]=\{\gamma\Sigma\gamma^{-1}|\gamma\in\Gamma\}$。记 $\mathscr{L}(\Gamma)$ 为全体迷向子群共轭类的集合，并在其中规定顺序关系：对 $\Sigma\subset\Delta$ 记为 $[\Sigma]<[\Delta]$，则称 $\mathscr{L}(\Gamma)$ 为**迷向格**(isotropy lattice)。以后在书写共轭类时，经常略去[ ]。

[例] 设两面体群 $\boldsymbol{D}_m(m\geqslant3)$ 作用在 $\mathbb{C}$ 上，它可由变换 $\kappa z=\bar{z}$ 和 $\zeta z=e^{2\pi i/m}z$ 生成。考虑到在过原点的直线上各点(除原点外)有相同的迷向子群，且在同一群轨道上各点的迷向子群属于同一个共轭类，因此当 $z\neq0$ 时，我们可以只考虑单位圆上的点 $z=e^{i\theta}$，且取 $\theta\in[0,\pi/m]$。容易看到，它们对应的迷向子群为：当 $\theta=0$ 时 $\Sigma_1=\boldsymbol{Z}_2(\kappa)$，当 $0<\theta<\pi/m$ 时 $\Sigma_2=\mathbb{1}$；当 $\theta=\pi/m$ 时，$\Sigma_3=\boldsymbol{Z}_2(\zeta\kappa)$。此外，$z=0$ 的迷向子群是 $\Sigma_0=\boldsymbol{D}_m$。最后注意到，当 m 为奇数时，令 $m=2k+1$，可证 $\zeta\kappa=\zeta^{-k}\kappa\zeta^{k}$，故 $\zeta\kappa$ 与 κ 共轭，从而 $\boldsymbol{Z}_2(\kappa)=\boldsymbol{Z}_2(\zeta\kappa)$；但当 m 为偶数时则不然。由此可得 $\boldsymbol{D}_m$ 作用在 $\mathbb{C}$ 上时的迷向格如下：(箭头表示迷向子群增大的顺序关系)



对子群 $\Sigma\subset\Gamma$，定义

$$\mathrm{Fix}(\Sigma)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\sigma\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\ \forall\sigma\in\Sigma\}\tag{11.19}$$

为 Σ 的不动点子空间。显然，$\mathrm{Fix}(\mathbb{1})=\mathbb{R}^n$。当 Γ 不可约且不是 $\mathbb{1}$ 时，$\mathrm{Fix}(\Gamma)=\{0\}$。又如当 $\Gamma=\boldsymbol{D}_m$ 作用在 $\mathbb{C}$ 上时，它的各种迷向子群所对应的不动点子空间为：$\mathrm{Fix}(\mathbb{1})=\mathbb{C}$，$\mathrm{Fix}(\boldsymbol{D}_m)=\{0\}$，$\mathrm{Fix}(\boldsymbol{Z}_2(\kappa))$ 为实轴，$\mathrm{Fix}(\boldsymbol{Z}_2(\zeta\kappa))$ 为 $\theta=\pi/m$ 的直线(当 m 为偶数时)。

若 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 Γ 等变映射，Σ 是 Γ 的子群，则有 $g(\mathrm{Fix}(\Sigma))\subset\mathrm{Fix}(\Sigma)$，即 $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ 是 g 的不变子空间。我们还可证明

$$\gamma\,\mathrm{Fix}(\Sigma)=\mathrm{Fix}(\gamma\Sigma\gamma^{-1}),\qquad \forall\gamma\in\Gamma$$

这表明共轭子群的不动点子空间有相同的维数。

设 $\Sigma\subsetneqq\Gamma$ 是一个真迷向子群，且不存在 Γ 的迷向子群 Δ 使得 $\Sigma\subsetneqq\Delta\subsetneqq\Gamma$，则称 Σ 为 Γ 的**最大迷向子群**。下面的定理可用来判断最大迷向子群的存在性[9]：

定理 1 设 Σ 是紧李群 Γ 的子群，且 $\mathrm{Fix}(\Gamma)=\{0\}$，则 Σ 为 Γ 的最大迷向子群的充要条件是：

1. $\dim\mathrm{Fix}(\Sigma)>0$，

2. 对 Γ 的每个闭子群 $\Delta\subsetneqq\Sigma$，有 $\dim\mathrm{Fix}(\Delta)=0$。

特别地，如果 $\dim\mathrm{Fix}(\Sigma)=1$，则 Σ 必为最大迷向子群。

现在回到对称分岔问题(11.15)。取平凡解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 作为基本解，它有迷向子群 $\Sigma_0=\Gamma$。如果存在(11.15)的一个非平凡解 $(\boldsymbol{x}(t),\ \mu(t))$，使得 $(\boldsymbol{x}(0),\ \mu(0))=(\boldsymbol{0},\ 0)$，且当 $|t|\neq0$ 足够小时，$\boldsymbol{x}(t)\neq0$，其迷向子群 $\Sigma=\Sigma_{\boldsymbol{x}(t)}\subsetneqq\Gamma$。这时分岔解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的迷向子群变小，对称性程度减少。我们称平凡解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 $\mu=0$ 处出现**自发对称性破缺**。显然，对称性破缺(即 $t\neq0$)的分岔解 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathrm{Fix}(\Sigma)$。

静态分岔的对称性破缺的基本问题是：对于什么样的子群 $\Sigma\subsetneqq\Gamma$，对称分岔问题(11.15)有以 Σ 为迷向子群的分岔解 $(\boldsymbol{x},\ \mu)$？即(11.15)在 $\mathrm{Fix}(\Sigma)\times\mathbb{R}$ 上的限制方程

$$g(\boldsymbol{x},\ \mu)=\boldsymbol{0}\qquad \boldsymbol{x}\in\mathrm{Fix}(\Sigma),\ \mu\in\mathbb{R}\tag{11.20}$$

的非平凡解存在性问题。下面给出一个重要的结果。

设紧李群 Γ 绝对不可约地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上，$g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 是 Γ 等变的，$g(\boldsymbol{0},\ \mu)=0$，$\det(D_xg(\boldsymbol{0},\ 0))=0$。由 $g(\gamma\boldsymbol{x},\ \mu)=\gamma g(\boldsymbol{x},\ \mu)$ 得到 $D_xg(\boldsymbol{0},\ \mu)\gamma=\gamma D_xg(\boldsymbol{0},\ \mu)$。再由 Γ 的绝对不可约作用，可知 $D_xg(\boldsymbol{0},\ \mu)=c(\mu)I$，其中 $c(\mu)$ 是实函数，且有 $c(0)=0$。设 $c'(0)\neq0$(这个条件显然是通有的)。我们有下述结果：

定理 2(等变分支引理[9]) 在上述假设下，若 $\Sigma\subset\Gamma$ 是迷向子群，且

$$\dim\mathrm{Fix}(\Sigma)=1,\tag{11.21}$$

则方程 $g(x, \mu)=0$ 有唯一的光滑解支 $(x(t), \mu(t))$（这里 $|t|<\delta$），使得 $x(0)=0, \mu(0)=0$，且 $t\neq 0$ 的解 $x(t)\neq 0$，其迷向子群为 Σ。

等变分支引理表明，对于 Γ 的有一维不动点子空间的迷向子群 Σ，Γ 对称分岔问题(11.15)在 $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ 中通常有唯一的分岔解支。由定理1可知，条件(11.21)意味着 Σ 是一个最大迷向子群。此外，取非零的 $v_0\in \mathrm{Fix}(\Sigma)$，该分岔解支可写成 $(tv_0, \mu(t))$ 的形式（这里 $t\in\mathbb{R}$），其中实函数 $\mu(t)$ 有 $\mu(0)=0$。

我们还可去掉 Γ 的绝对不可约作用的条件，得到更为一般的结果[9]：

定理3 设紧李群 Γ 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上，并设

1. $\mathrm{Fix}(\Gamma)=\{0\}$，
2. $\Sigma\subset\Gamma$ 是迷向子群，且满足(11.21)，
3. $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 是 Γ 等变的，$g(0, \mu)\equiv 0$，$\det(D_x g(0, 0))=0$，且对非零的 $v_0\in \mathrm{Fix}(\Sigma)$ 有 $D_x(g_\mu(0, 0))v_0\neq 0$，

则方程 $g(x, \mu)=0$ 有唯一的光滑解支 $(tv_0, \mu(t))$（这里 $|t|<\delta$），使得 $\mu(0)=0$；且 $t\neq 0$ 的解的迷向子群为 Σ。

对称性破缺提供了解决对称分岔问题的基本思路。Γ 对称分岔问题的分岔解一般有不同的对称性，它们的迷向子群 Σ 经常比 Γ 小得多，即 $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ 的维数往往较低。我们根据 Γ 的迷向子群 Σ 去寻求迷向子群为 Σ 的分岔解，即求解维数较低的限制方程(11.20)，显然可以大大简化对称分岔问题的处理。定理2和3起着重要的作用，这时 Σ 是有一维不动点子空间的最大迷向子群，一维方程(11.20)有唯一解支。因此我们可从 Γ 的最大迷向子群出发，并根据迷向格顺序进行下去，就能相继找到有不同的对称性的分岔解。在讨论各种对称分岔问题时，特别是退化情形中，等变奇异性理论是十分有用的。总的来说，对称性虽然在某些方面使分岔研究复杂化（例如出现多重特征值等），但是在另一些方面却可使分岔研究得到简化（例如降低退化分岔的余维数、对称性破缺等），并提供了一些有效的理论工具（例如不变量理论、等变奇

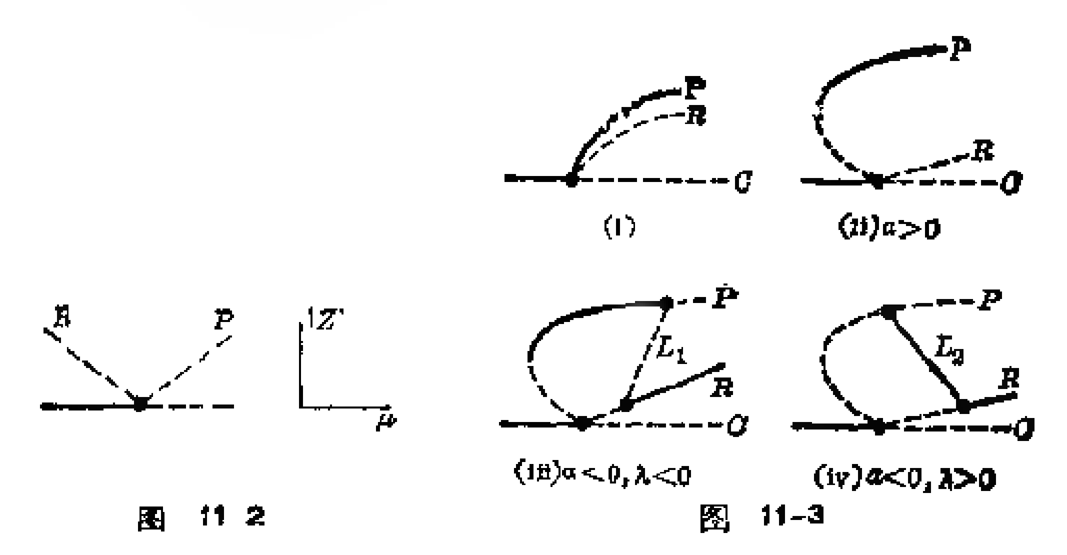


图 11-2　　　　图 11-3

异性理论、等变分支引理等)．在对称分岔研究中，群论是重要的理论基础．

作为例子，我们考虑 D_3 作用在 $\mathbb{C}$ 上的情形．由第 97 页知道，D_3 等变分岔问题的一般形式是

$$g(z,\ \mu)\equiv p(u,\ v,\ \mu)z+q(u,\ v,\ \mu)\bar{z}^2=0, \qquad (11.22)$$

其中 $u=z\bar{z}$, $v=z^3+\bar{z}^3$, p、$q\in\mathscr{E}_2$, $p(0,\ 0,\ 0)=0$, $\mu\in\mathbb{R}$．等变奇异性理论给出各种 D_3 等变 GS 范式，其中最简单的有：

1．当 $p(0,\ 0,\ 0)=0$, $p_\mu(0,\ 0,\ 0)\neq 0$, $q(0,\ 0,\ 0)\neq 0$ 时，g 与 $h(z,\ \mu)=\varepsilon\mu z+\delta\bar{z}^2$ 是 D_3 等价的，其中 $\varepsilon=\operatorname{sgn}p_\mu(0,\ 0,\ 0)$, $\delta=\operatorname{sgn}q(0,\ 0,\ 0)$，且 g 的 D_3 余维数为 0．这是唯一的非退化 D_3 等变分岔问题．

2．当 $p(0,\ 0,\ 0)=q(0,\ 0,\ 0)=0$ 时，取

$$p(u,\ v,\ \mu)=Au+Bv+\alpha\mu+\cdots\cdots,$$
$$q(u,\ v,\ \mu)=Cu+Dv+\beta\mu+\cdots\cdots.$$

设其系数满足：α、A、$\alpha C-\beta A$ 和 $AD-BC$ 皆不等于 0，则 g 与 $k(z,\mu)=(\varepsilon u+\delta\mu)z+(\sigma u+mv)\bar{z}^2$ 是 D_3 等价的，其中 $\varepsilon=\operatorname{sgn}A$, $\delta=\operatorname{sgn}\alpha$, $\sigma=\operatorname{sgn}(\alpha C-\beta A)\delta$, $m=\varepsilon(AD-BC)\alpha^2/(\alpha C-\beta A)^2$，且 g 的 D_3 余维数为 2．这是最简单的退化 D_3 等变分岔问题．k 的一个普适 D_3 开折是

$$K(z,\ \mu,\ \lambda,\ \alpha)=(\varepsilon u+\delta\mu)z+(\sigma u+\lambda v+\alpha)\bar{z}^2, \qquad (11.23)$$

其中开折参数(λ, α)在$(m, 0)$附近取值.

由上面知道，若 D_3 绝对不可约地作用在 $\mathbb{C}$ 上，它有最大迷向子群 $Z_2(\kappa)$，其不动点子空间

$$\mathrm{Fix}(Z_2(\kappa)) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}$$

是一维的. 由等变分支引理，可知(11.22)有唯一的 Z_2 对称分岔解支，它可由(11.22)在 $\mathrm{Fix}(Z_2(\kappa)) \times \mathbb{R}$ 上的限制方程解出. 具体讨论如下.

方程 $h(z, \mu) = \bar{z}^2 - \mu z = 0$ 的 Z_2 对称分岔解由限制方程

$$x^2 - \mu x = 0 \tag{11.24}$$

的非平凡解 $x = \mu$ 给出，它是不稳定的. 由它的 D_3 群轨道还可以得到其他两个分岔解. 显然，在(0, 0)处出现跨临界分岔. 相应的 D_3 对称分岔图见图 11-2(注意：纵坐标为$|z|$)，非零解支 P 和 R 都是 Z_2 对称的，且都是不稳定的.

方程 $k(z, \mu) \equiv (u - \mu)z + (u + mv)z^2 = 0$ 的 Z_2 对称分岔解由限制方程

$$x(x^2 - \mu + x^3 + 2mx^4) = 0 \tag{11.25}$$

的非平凡解给出. (11.25)在(0, 0)处出现非对称的超临界叉形分岔. 在非平凡解支中，一支是稳定的，另一支是不稳定的. 相应的 D_3 对称分岔图见图 11-3(i). 由于它是退化的，我们需要考虑由(11.23)给出的普适开折 $K(z, \mu, \lambda, \alpha) \equiv (u - \mu)z + (u + \lambda v + \alpha)z^2 = 0$ 给出的受扰分岔图. 利用与上面类似的方法，可以求出当 $\alpha \neq 0$ 时的 Z_2 对称分岔解，并知道在(0, 0)处出现跨临界分岔，在亚临界的解支上还有极限点. 此外，当 $\alpha < 0$ 时，在 Z_2 对称解支上还会出现二级分岔，导致有平凡迷向子群 $\mathbf{1}$ 的二级分岔解. 图 11-3(ii)~(iv)分别给出这些受扰分岔图. 图上的非零解支 P 和 R 有迷向子群 Z_2，L_1 和 L_2 有迷向子群 $\mathbf{1}$，零解有迷向子群 D_3，因此清楚地反映了对称性破缺现象.

有对称性的静态分岔理论有许多重要应用. 例如，有对称性的梁、板和壳的屈曲、瑞利-贝纳特热对流等[8],[2],[59]. 这里只对后

若作简单说明. 定常贝纳特对流系统(3.11)对于水平面上的平移、旋转和反射变换都有不变性, 即在水平方向上有 E_2 对称性. 此外, 此系统对关于中间的水平面的反射变换有不变性, 即在垂直方向上有 Z_2 对称性. 于是, 系统(3.11)有对称群 $\Gamma=E_2\oplus Z_2$. 在讨论有一定的空间周期性的定常热对流解时, 我们可取 Γ 的某个子群 $\tilde{\Gamma}$ 作为对称群. 利用 LS 约化方法, 空间周期静态分岔问题化为低维分岔方程, 例如在研究有正六角形胞腔的对流时, 分岔方程是六维的, 对称群是 $(D_6 \dot{+} T^2)\oplus Z_2$ (其中 T^2 是二维环面群, 它代表在水平面上的平移). 然后借助群论和等变奇异性理论方法, 得到热对流分岔的定性结果. 研究表明, 稳定的定常热对流在瑞利数 R_a 大于某个临界值时出现, 一般可有水平柱状、或有正六角形和三角形截面的胞腔, 其中以柱状对流最常见. 不过, 流体性质、表面张力、边界条件等都会使热对流有形成六角形胞腔的趋向.

第4章

动态分岔和模态相互作用

§12 霍普夫分岔

§12.1 基本理论

考虑含单参数的系统

$$\dot{x}=f(x,\mu),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad \mu\in\mathbb{R} \tag{12.1}$$

设 $f(x_0,\mu)\equiv 0$，即对一切 μ，x_0 是(12.1)的平衡点．并设在 $\mu=\mu_0$ 时，$D_x f(x_0,\mu_0)$ 有一对纯虚共轭特征值，而其余 $n-2$ 个特征值有非零实部．因此，在 $\mu=\mu_0$ 时，x_0 是一个非双曲平衡点，它是结构不稳定的．本节讨论当 μ 经过 μ_0 时在平衡点 x_0 附近的分岔问题．其中，最重要的是霍普夫分岔．由§7得知，在 $\mu=\mu_0$ 时存在过点 x_0 的二维中心流形．我们可以利用中心流形方法，把系统限制到中心流形上进行研究．也就是说，这时只需考虑二维系统的分岔问题．不失一般性，取 $(x_0,\mu_0)=(0,0)$．

下面讨论含参数 μ 的二维系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f_1(x,y,\mu),\\ \dot{y}=f_2(x,y,\mu).\end{cases}\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \mu\in\mathbb{R} \tag{12.2}$$

设 $f_1(0,0,\mu)=f_2(0,0,\mu)\equiv 0$．记(12.2)在 $(x,y)=(0,0)$ 处的导算子为 $\Omega(\mu)$，其特征值为 $\alpha(\mu)\pm i\omega(\mu)$．设当 $\mu=0$ 时，这些特征值是纯虚数 $\pm i\omega_0$（其中 $\omega_0>0$），即有 $\alpha(0)=0$，$\omega(0)=\omega_0$．利用适当的坐标线性变换，可将(12.2)写成

$$\begin{cases}\dot{x}=\alpha(\mu)x-\omega(\mu)y+\tilde{f}_1(x,y,\mu),\\ \dot{y}=\omega(\mu)x+\alpha(\mu)y+\tilde{f}_2(x,y,\mu),\end{cases} \tag{12.3}$$

其中 $\tilde{f}_1$、$\tilde{f}_2=O(x^2+y^2)$.

为了进行分岔研究，我们计算含参数系统(12.3)的 PB 范式. 由于(12.3)的导算子有复共轭特征值，因此采用复坐标去计算就比较方便. 记 $z=x+iy$, $\lambda(\mu)=\alpha(\mu)+i\omega(\mu)$. 由(12.3)得到

$$\dot{z}=\lambda(\mu)z+g(z,\ \bar{z},\ \mu) \qquad z\in\mathbb{C} \tag{12.4}$$

及其复共轭方程，其中 $g=O(|z|^2)$. 显然，我们只需计算方程(12.4)的 PB 范式.

先计算 2 阶 PB 范式. 取(12.4)的二阶泰勒展开式

$$\dot{z}=\lambda(\mu)z+g_2(z,\ \bar{z},\ \mu)+O(|z|^3), \tag{12.5}$$

其中 $g_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{C})$(这里 $\mathscr{H}_k(\mathbb{C})$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的全部 k 次齐次多项式函数组成的线性空间). 作变换

$$z=w+h_2(w,\ \bar{w}), \tag{12.6}$$

其中 $h_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{C})$ 是待定函数，其各项系数可以与 μ 有关. 将(12.6)代入(12.5)中，得到

$$\begin{aligned}&\dot{w}\left(1+\frac{\partial h_2}{\partial w}\right)+\frac{\partial h_2}{\partial \bar{w}}\dot{\bar{w}}\\&=\lambda w+\lambda h_2+g_2(w,\ \bar{w},\ \mu)+O(|w|^3).\end{aligned} \tag{12.7}$$

考虑到(12.7)的复共轭方程以及关系式

$$\left(1+\frac{\partial h_2}{\partial w}\right)^{-1}=1-\frac{\partial h_2}{\partial w}+O(|w|^2), \tag{12.8}$$

便得到 w 的方程:

$$\dot{w}=\lambda w-\mathfrak{L}_2 h_2+g_2+O(|w|^3), \tag{12.9}$$

其中线性算子 $\mathfrak{L}_2$: $\mathscr{H}_2(\mathbb{C})\to\mathscr{H}_2(\mathbb{C})$ 由下式定义:

$$\mathfrak{L}_2h(w,\ \bar{w})=\left(\lambda\frac{\partial h}{\partial w}w+\bar{\lambda}\frac{\partial h}{\partial \bar{w}}\bar{w}\right)-\lambda h, \qquad h\in\mathscr{H}_2(\mathbb{C}) \tag{12.10}$$

取空间分解 $\mathscr{H}_2(\mathbb{C})=\mathscr{R}(\mathfrak{L}_2)\oplus\mathscr{G}_2$，其中 $\mathscr{R}(\mathfrak{L}_2)$ 是 $\mathfrak{L}_2$ 的值域，$\mathscr{G}_2$ 是其补空间. 于是 $g_2\in\mathscr{H}_2(\mathbb{C})$ 可分解为

$$g_2(w, \bar{w}, \mu) = p_2(w, \bar{w}, \mu) + q_2(w, \bar{w}, \mu),$$

$$p_2 \in \mathscr{R}(\mathfrak{L}_2), \quad q_2 \in \mathscr{G}_2$$

我们取(12.6)中的 h_2 满足 $\mathfrak{L}_2 h_2 = p_2$，于是(12.9)简化为2阶PB范式：

$$\dot{w} = \lambda w + q_2(w, \bar{w}, \mu) + O(|w|^3). \tag{12.11}$$

令 $\mathscr{H}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{span}\{w^2, w\bar{w}, \bar{w}^2\}$，我们可用§8.2所述的方法(例如矩阵法)去确定补空间 $\mathscr{G}_2$，从而得到 q_2 的具体表达式. 计算结果表明，当 $|\mu|$ 足够小时，有 $\mathscr{G}_2 = \{0\}$，故 $q_2 \equiv 0$. 于是(12.11)给出的2阶PB范式中不含二次项. 我们必须进一步计算高阶PB范式，才能了解非线性项对系统的定性性态的影响.

接着计算3阶PB范式. 利用变换将(12.4)中的二次项消去，并取其三阶泰勒展开式(这里仍将变量记为 z)：

$$\dot{z} = \lambda z + g_3(z, \bar{z}, \mu) + O(|z|^4), \tag{12.12}$$

其中 $g_3 \in \mathscr{H}_3(\mathbb{C})$. 作变换

$$z = w + h_3(w, \bar{w}), \tag{12.13}$$

其中 $h_3 \in \mathscr{H}_3(\mathbb{C})$ 是待定函数，使得(12.12)中的三次项得以简化. 令 $\mathscr{H}_3(\mathbb{C}) = \mathrm{span}\{w^3, w^2\bar{w}, w\bar{w}^2, \bar{w}^3\}$，利用与上面类似的方法，可知当 $|\mu|$ 足够小时，补空间 $\mathscr{G}_3 = \mathrm{span}\{w^2\bar{w}\}$，故(12.4)的3阶PB范式为

$$\dot{w} = \lambda(\mu)w + c(\mu)w^2\bar{w} + O(|w|^4), \tag{12.14}$$

其中 $c(\mu)$ 与(12.4)中的非线性项 g 有关. 若 g 的3阶泰勒展开式为

$$g(z, \bar{z}, \mu) = \sum_{2 \leq i+j \leq 3} g_{ij}(\mu) \frac{z^i \bar{z}^j}{i!\,j!} + O(|z|^4),$$

则通过具体计算得到

$$c(\mu) = \frac{1}{2|\lambda|^2} g_{20} g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda}) + \frac{1}{\bar{\lambda}} |g_{11}|^2 + \frac{1}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} |g_{02}|^2 + \frac{1}{2} g_{21}. \tag{12.15}$$

进一步的计算表明，当 $|\mu|$ 足够小时，还可将四次项消去. 于是，方程(12.4)的4阶PB范式与(12.14)相同，即有

$$\dot{w}=\lambda(\mu)w+c(\mu)w^2\bar{w}+O(|w|^5). \tag{12.16}$$

记 $c(\mu)=a(\mu)+ib(\mu)$, $w=x_1+ix_2$, 便可由上式得到方程(12.3)的 4 阶 PB 范式:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\alpha(\mu)x_1-\omega(\mu)x_2+[a(\mu)x_1-b(\mu)x_2](x_1^2+x_2^2)+O(r^5),\\ \dot{x}_2=\omega(\mu)x_1+\alpha(\mu)x_2+[b(\mu)x_1+a(\mu)x_2](x_1^2+x_2^2)+O(r^5),\end{cases} \tag{12.17}$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$. 在极坐标系中, (12.17)写成较简单的形式:

$$\begin{cases}\dot{r}=\alpha(\mu)r+a(\mu)r^3+O(r^5),\\ \dot{\theta}=\omega(\mu)+b(\mu)r^2+O(r^4).\end{cases} \tag{12.18}$$

由于我们关心在 $\mu=0$ 附近的性态, 故将(12.18)的系数在 $\mu=0$ 处作泰勒展开, 得

$$\begin{cases}\dot{r}=d\mu r+ar^3+O(\mu^2 r,\ \mu r^3,\ r^5),\\ \dot{\theta}=\omega_0+e\mu+br^2+O(\mu^2,\ \mu r^2,\ r^4).\end{cases} \tag{12.19}$$

其中常数 $d=\alpha'(0)$, $a=a(0)$, $e=\omega'(0)$, $b=b(0)$. 注意, 这里已用了 $\alpha(0)=0$. 当 $\mu=0$, $\omega_0=1$ 时, (12.19)给出的结果与(8.42)一致.

利用常微分方程定性分析方法, 容易得知(12.19)的 4 阶截断系统当 $a\neq0$、$d\neq0$ 时在 $\mu=0$ 处出现分岔. 事实上, 对充分小的 $|\mu|$, 且 μ 与 d/a 异号时, (12.19)的截断系统有一条闭轨

$$(r(t),\ \theta(t))=\left(\sqrt{-\frac{\mu d}{a}},\ \left[\omega_0+\left(e-\frac{bd}{a}\right)\mu\right]t+\theta_0\right). \tag{12.20}$$

它当 $a<0$ 时是渐近稳定的, 当 $a>0$ 时是不稳定的. 例如, 对 $a<0$, b、d、e 和 $\omega_0>0$ 的情形的相图变化和分岔图, 分别见图 2.7 和 2.8(i). 我们关心的是, 系统(12.2)是否也有与其 4 阶 PB(截断)范式相同的分岔性态呢? 下面的定理肯定了这个论断.

定理 设系统(12.2)在原点处的导算子 $D_x f(0,\mu)$ 在 $\mu=0$ 附近有特征值 $\alpha(\mu)\pm i\omega(\mu)$, 使得 $\alpha(0)=0$, $\omega(0)=\omega_0>0$, $d=\alpha'(0)$

$\neq 0$†，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和一个解析函数

$$\mu(\varepsilon)=\sum_{k=2}^{\infty}\mu_k\varepsilon^k,\qquad \varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)\tag{12.21}$$

使得对 $\mu=\mu(\varepsilon)\neq 0$(其中 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0)$)，系统(12.3)在原点的充分小邻域内有唯一的闭轨 Γ_ε，其周期为

$$T(\varepsilon)=\frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\tau_k\varepsilon^k\right).\tag{12.22}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\mu(\varepsilon)\to 0$，Γ_ε 趋于原点．记 μ_{k_1} 为展开式(12.21)中第一个不为 0 的系数，则当 μ_{k_1} 与 d 同号时，Γ_ε 是稳定极限环；当 μ_{k_1} 与 d 异号时，Γ_ε 是不稳定极限环．

上述定理通常称为**霍普夫分岔定理**．[14]给出它的证明，并有系数 μ_k、τ_k 的一些计算公式．特别地，对 $k=2$，有

$$\mu_2=-a/d,\qquad \tau_2=-(b+\mu_2 e)/\omega_0,\tag{12.23}$$

其中 $a=\mathrm{Re}\,c(0)$(这里 $c(\mu)$ 由(12.15)给出)，它也可以用(12.3)中的非线性项 $\tilde f_1$、$\tilde f_2$ 直接计算[1]：

$$\begin{aligned}a=&(1/16)[\tilde f_{1xxx}+\tilde f_{1xyy}+\tilde f_{2xxy}+\tilde f_{2yyy}]_{(0,0,0)}\\&+(1/16\omega_0)[\tilde f_{1xy}(\tilde f_{1xx}+\tilde f_{1yy})-\tilde f_{2xy}(\tilde f_{2xx}+\tilde f_{2yy})\\&-\tilde f_{1xx}\tilde f_{2xx}+\tilde f_{1yy}\tilde f_{2yy}]_{(0,0,0)}.\end{aligned}\tag{12.24}$$

现在讨论在上述定理的条件下系统(12.3)的分岔情况．一方面，因为当 $\mu=0$ 时 $\alpha(0)=0$、$\alpha'(0)\neq 0$，故对充分小的 $|\mu|\neq 0$，有 $\alpha(\mu)\neq 0$，且 $\alpha(\mu)$ 在 $\mu=0$ 的两侧异号．由此可见，当 $\mu\neq 0$ 时原点是粗焦点，且当 μ 变化经过 0 时，其稳定性突然发生变化．当 $\mu=0$ 时，原点是细焦点．另一方面，由上述定理得知，当 $\mu_{k_1}>0$(或 <0)时，有 $\mu(\varepsilon)>0$(或 <0)(其中 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$)，系统(12.3)对 $\mu>0$(或 <0)存在唯一的极限环；而对 $\mu<0$(或 >0)，无极限环．显然，(12.3)的拓扑结构在 $\mu=0$ 处突然改变，因此在该处出现分岔．

我们把当分岔参数变化时从平衡点(焦点)产生极限环的分岔现象称为**霍普夫分岔**．满足 $a\neq 0$ 和 $d\neq 0$ 的霍普夫分岔称为通有

† 它表示 $\lambda(\mu)$ 的复特征值当 $\mu=0$ 时横穿虚轴，通常称为"横截性条件"。

的. 其他的霍普夫分岔称为退化的. 一般,把通有霍普夫分岔简称为霍普夫分岔. 通有霍普夫分岔满足霍普夫分岔定理的条件, 它对应 $\mu_2\neq 0$ 的情形,其分岔性态可由HB范式(12.19)描述, 图2-8给出一部分分岔图. 由(12.23)可知, 当 a 与 d 异号(或同号)时, 分岔是超临界(或亚临界)的; 当 $a<0$(或 >0)时, 极限环是稳定(或不稳定)的. 由§14将会知道,通有霍普夫分岔的分岔图对小扰动是持久的,但退化霍普夫分岔的分岔图不是持久的. 我们还注意到,在退化霍普夫分岔情形中,从平衡点可能产生多个极限环.

[例] 考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x(\mu-r^2)(\mu-2r^2),\\ \dot{y}=x+y(\mu-r^2)(\mu-2r^2),\end{cases}\tag{12.25}$$

其中 $r^2=x^2+y^2$, $\mu\in\mathbb{R}$. (12.25)在极坐标中写成

$$\begin{cases}\dot{r}=r(\mu-r^2)(\mu-2r^2),\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}\tag{12.26}$$

图 12-1

容易见到, 原点对一切 μ 都是不稳定焦点; 此外, 对 $\mu>0$ 有两条闭轨 Γ_1 和 Γ_2, 其中

$$\Gamma_1:\ (x,\ y)=\sqrt{\mu}(\cos t,\ \sin t),$$

$$\Gamma_2:\ (x,\ y)=\sqrt{\mu}(\cos t,\ \sin t).$$

Γ_1 是不稳定极限环, Γ_2 是稳定极限环. 分岔图见图12-1,它表明在 $\mu=0$ 处出现退化霍普夫分岔, 这时从原点"冒出"两个极限环.

应当指出, 我们也可以用LS约化方法和对称静态分岔理论去研究霍普夫分岔(参看[8]的第八章), 其主要思想如下. 先考虑二维系统的情形. 引入新的时间变量 s, 使得

$$t=(1+\tau)s,\tag{12.27}$$

其中的小量 τ 待定. 于是,将方程(12.1)写成

$$\Phi(x,\ \mu,\ \tau)=\frac{dx}{ds}-(1+\tau)f(x,\ \mu)=0,\quad x\in\mathbb{R}^2\tag{12.28}$$

我们只考虑(12.28)的周期为 $T_0=2\pi/\omega_0$ 的小振幅解,它对应方程

(12.1)的周期为$T=(1+\tau)T_0$的小振幅解. 为此, 规定算子Φ: $C^1_{T_0}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to C^0_{T_0}$, 其中$C^0_{T_0}$或$C^1_{T_0}$)为周期$T_0$的全体连续(或连续可微)$n$维向量函数组成的巴拿赫空间, 并取范数分别为

$$\|x\|_0=\max_{s\in[0,T_0]}\|x(s)\|,\qquad \|x\|_1=\|x\|_0+\left\|\frac{dx}{ds}\right\|_0.$$

我们通过相移去定义圆周群S^1对空间$C^0_{T_0}$的作用如下:

$$(\theta\cdot x)(s)=x(s-\theta),\quad \forall\theta\in S^1,\ x\in C^0_{T_0}\qquad(12.29)$$

由(12.28), 容易证明Φ是S^1等变的, 即

$$\Phi(\theta\cdot x,\ \mu,\ \tau)=\theta\cdot\Phi(x,\ \mu,\ \tau).\qquad(12.30)$$

因此, 可以把(12.28)看作空间$C^1_{T_0}$上有对称群S^1的静态方程. 接着利用LS约化方法, 可以得到一维的分岔方程

$$g(r,\ \mu)=rp(r^2,\ \mu)=0,\qquad r\in\mathbb{R}\qquad(12.31)$$

其中函数p满足$p(0,\ 0)=0$. 由于$g(r,\ \mu)=-g(-r,\ \mu)$, 故g是Z_2等变的. 我们可以用Z_2等变奇异性理论去研究(12.31)在(0, 0)附近的分岔性态. 特别是在退化霍普夫分岔情形中, 可用普适Z_2开折去考虑受扰的分岔图. 由于(12.31)在(0, 0)附近满足$r\geqslant0$的局部解是与(12.1)的周期接近T_0的小振幅解一一对应的, 因此(12.31)的Z_2对称分岔结果完全反映(12.1)的霍普夫分岔性态. 此外, 对n维系统的一般情形, 如果方程(12.1)还有Γ对称性, 即对作用在$\mathbb{R}^n$上的紧李群Γ有

$$f(\gamma x,\ \mu)=\gamma f(x,\ \mu),\qquad\forall\gamma\in\Gamma\qquad(12.32)$$

我们同样可将Γ对称系统的霍普夫分岔问题化为$\Gamma\times S^1$对称系统的静态分岔问题(参看[9]的第十六至十八章), 并用对称性破缺和等变奇异性理论去研究.

§ 12.2 霍普夫分岔的计算

为了计算在霍普夫分岔中的周期解, 除PB范式方法外[14], 还可以用摄动法、平均法、渐近法(KBM法)、谐波平衡法等[24],[28],[60],[61]. 这里举一个用奇异摄动法求周期解的例子.

[例] 考虑平面系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x+\mu y-x^2 y.\end{cases}\quad (x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \qquad (12.32)$$

它对一切 μ 都有平衡点 $(0, 0)$. 在该处的导算子矩阵为

$$\boldsymbol{L}(\mu)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & \mu\end{pmatrix},$$

其特征值为 $(\mu\pm i\sqrt{4-\mu^2})/2$, 从而

$$\alpha(\mu)=\mu/2, \qquad \omega(\mu)=\sqrt{4-\mu^2}/2.$$

当 $\mu=0$ 时, $\boldsymbol{L}(0)$ 有特征值 $\pm i$, 且 $d=\alpha'(0)=1/2$, 由 (12.24) 得到 $a=-1/8$. 于是系统 (12.32) 在 $\mu=0$ 时出现超临界的通有霍普夫分岔.

现在对充分小的 $\mu>0$, 求在 $(0, 0)$ 附近的周期解 $(x(t), y(t))^T$. 设这个周期解在 $t=0$ 时的初值为 $(\varepsilon, 0)^T$, ε 是小量. 记这个周期解的周期为 $T(\varepsilon)$. 由 (12.22) 知道, $T(\varepsilon)$ 可表示成

$$T(\varepsilon)=2\pi(1+\tau(\varepsilon)), \qquad (12.33)$$

其中 $\tau(\varepsilon)$ 是待定的函数. 取新的时间变量

$$s=t/(1+\tau(\varepsilon)), \qquad (12.34)$$

于是方程 (12.32) 关于 t 的周期为 $T(\varepsilon)$ 的解都变为关于 s 的周期为 2π 的解. 记 $\boldsymbol{u}(s)=(x(s), y(s))^T$, 方程 (12.32) 可写成

$$d\boldsymbol{u}/ds-(1+\tau(\varepsilon))\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}), \qquad (12.35)$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}=(1+\tau(\varepsilon))\begin{pmatrix}0\\ \mu y-x^2 y\end{pmatrix}. \qquad (12.36)$$

我们求 (12.35) 的周期为 2π 的小振幅解 $\boldsymbol{u}(s)\in C^1_{2\pi}$. 为此, 取对小参数 ε 的渐近展开式:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}(s)=\boldsymbol{u}_1(s)\varepsilon+\boldsymbol{u}_2(s)\varepsilon^2+\cdots\cdots,\\ &\mu=\mu_2\varepsilon^2+\cdots\cdots, \qquad \tau=\tau_2\varepsilon^2+\cdots\cdots.\end{aligned} \qquad (12.37)$$

将 (12.37) 代入方程 (12.35) 和初值 $\boldsymbol{u}(0)=(\varepsilon, 0)^T$ 中, 比较 ε 的同次幂的系数, 可得各阶近似方程和相应的初值, 从而依次解出

$u_k'(s)$.

一阶近似方程为

$$du_1/ds - Au_1 = 0, \quad u_1(0) = (1, 0)^T. \tag{12.38}$$

其 $C^1_{2\pi}$ 解为

$$u_1(s) = (x_1(s), y_1(s))^T = (\cos s, \sin s)^T.$$

二阶近似方程为

$$du_2/ds - Au_2 = 0, \quad u_2(0) = (0, 0)^T. \tag{12.39}$$

其 $C^1_{2\pi}$ 解为 $u_2(s) = (x_2(s), y_2(s))^T = (0, 0)^T$.

三阶近似方程为

$$du_3/ds - Au_3 = \tau_2 Au_1 + g_3, \quad u_3(0) = (0, 0)^T, \tag{12.40}$$

其中 $g_3 = (0, \mu_2 y_1 - x_1^2 y_1)^T$. 将一阶近似解代入后，得到

$$du_3/ds - Au_3 = f_3(s), \quad u_3(0) = (0, 0)^T, \tag{12.41}$$

其中 $f_3 = (-\tau_2 \sin s, \tau_2 \cos s + \mu_2 \sin s - \cos^2 s \sin s)^T$. 根据弗雷德霍姆择一性定理，(12.41)有解 $u_3 \in C^1_{2\pi}$ 的充要条件是

$$\langle f_3, \psi_k \rangle_2 \equiv \int_0^{2\pi} \langle f_3(s), \psi_k(s) \rangle ds = 0, \quad k = 1, 2 \tag{12.42}$$

其中 $\{\psi_1, \psi_2\}$ 是共轭线性齐次方程

$$dv/ds + A^T v = 0 \quad v \in C^1_{2\pi} \tag{12.43}$$

的一个基础解组. 容易求得

$$\psi_1 = (\cos s, \sin s)^T, \quad \psi_2 = (\sin s, -\cos s)^T.$$

把它们代入可解性条件(13.42)，得到

$$\pi\mu_2 - \pi/4 = 0, \quad 2\pi\tau_2 = 0.$$

由此求出 $\mu_2 = 1/4$, $\tau_2 = 0$，这与按公式(12.23)计算的结果一致。把 μ_2、τ_2 代入(12.41)中，可以求出

$$u_3(s) = \frac{3}{32}(\sin s - \sin 3s, -\cos s + \cos 3s)^T.$$

于是，我们有渐近展开结果

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(s)=\boldsymbol{u}_1(s)\varepsilon+\boldsymbol{u}_3(s)\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),\\
&\mu=\varepsilon^2/4+O(\varepsilon^3),\qquad \tau=O(\varepsilon^3).
\end{aligned}
\tag{12.44}
$$

由此可知，对充分小的 $\mu>0$，有

$$
\varepsilon=2\mu^{1/2}+O(\mu^{3/2}).
$$

从而得到对充分小的 $\mu>0$ 的周期解

$$
\boldsymbol{u}(s)=2\boldsymbol{u}_1(s)\mu^{1/2}+8\boldsymbol{u}_3(s)\mu^{3/2}+O(\mu^2).
$$

还可用(12.34)将上式的变量 s 换为原来的变量 t. 这个周期解关于时间 t 的周期为

$$
T(\mu)=2\pi(1+\tau)=2\pi(1+O(\mu^{3/2})).
$$

§12.3 应用例子

霍普夫分岔涉及当参数变化时由平衡状态产生周期运动状态的现象，因此，在研究力学、物理、化学、生物、控制、机电等方面的自激振动和波动现象时，霍普夫分岔有重要的作用.

[例 1] 布鲁塞尔振子系统的霍普夫分岔.

首先讨论空间均匀情形. 在(3.22)中，取 $X=X(t)$、$Y=Y(t)$，则有常微分方程系统

$$
\begin{cases}
\dot X=A-(B+1)X+X^2Y,\\
\dot Y=BX-X^2Y,
\end{cases}
\qquad (X,\ Y)\in\mathbb{R}^2
\tag{12.45}
$$

其中 $A>0$ 为常数，$B>0$ 为分岔参数.

系统(12.45)有平衡点$(A,\ BA^{-1})$. 作坐标变换

$$
X=x+A,\qquad Y=y+BA^{-1}.
$$

于是(12.45)成为

$$
\begin{cases}
\dot x=(B-1)x+A^2y+(BA^{-1})x^2+2Axy+x^2y,\\
\dot y=-Bx-A^2y-(BA^{-1})x^2-2Axy-x^2y.
\end{cases}
\tag{12.46}
$$

它对一切 B 值都有平衡点$(0,\ 0)$，在该处的导算子矩阵为

$$
L(B)=\begin{pmatrix} B-1 & A^2\\ -B & -A^2\end{pmatrix}.
$$

$\boldsymbol{L}(B)$ 的特征值为 $\lambda_{1,2}(B)=\alpha(B)\pm i\omega(B)$，其中

$$
\begin{aligned}
&\alpha(B)=[B-(1+A^2)]/2,\\
&\omega(B)=\sqrt{A^2-\alpha^2(B)}.
\end{aligned}
\tag{12.47}
$$

由此可见，当 $1-A^2<B<1+3A^2$ 时，λ_1 和 λ_2 是一对复共轭特征值。特别地，当 $B=1+A^2=B_c'$ 时有 $\alpha(B_c')=0$，$\omega(B_c')=A=\omega_0$，$\lambda_{1,2}(B_c')=\pm i\omega_0$。因此我们着重讨论在 $B=B_c$ 附近系统(12.46)是否出现霍普夫分岔。

再作坐标变换

$$
\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ (1-B+\alpha(B))/A^2 & -\omega(B)/A^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v \end{pmatrix}.
$$

(12.46)变为

$$
\begin{cases}
\dot{u}=\alpha(B)u-\omega(B)v+(B/A)u^2+u(2A+u)\varphi(u,\ v),\\
\dot{v}=\omega(B)u+\alpha(B)v+(B/A)\delta u^2+\delta u(2A+u)\varphi(u,\ v),
\end{cases}
\tag{12.48}
$$

其中 $\delta=(1+A^2-B^2+\alpha(B))/\omega(B)$，$\varphi(u,\ v)=[(1-B+\alpha(B))u-\omega(B)v]/A^2$。

显然 $d=\alpha'(B_c')=1/2>0$。此外，记 $\mu=B-B_c'$，并按(12.23)求出

$$
\mu_2=\frac{1}{2A^2}+\frac{1}{4}>0,\qquad \tau_2=\frac{1}{6A^2}\left[\left(\frac{1}{A}-A\right)^2+\frac{1}{4}\right].
\tag{12.49}
$$

于是，由霍普夫分岔定理知道，当 $\mu>0$（即 $B>B_c'$）时，系统(12.48)在 $(u,\ v)=(0,\ 0)$ 附近有唯一的稳定极限环；当 $\mu\to 0$（即 $B\to B_c'$）时，此极限环趋于原点。这个极限环对应的周期解的周期为（见(12.22)）

$$
T=2\pi A^{-1}(1+\tau_2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)).
\tag{12.50}
$$

考虑到 $\mu=\mu_2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$，由(12.49)得到

$$
\varepsilon=2A(2+A^2)^{-1/2}\mu^{1/2}+O(\mu),\qquad \mu>0
\tag{12.51}
$$

将(12.49)和(12.51)代入(12.50)，并用 B 表示后，有

$$T=\frac{2\pi}{A}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{A}-A\right)^{2}\right)\left(1+\frac{A^{2}}{2}\right)^{-1}(B-B_c')\right.$$
$$\left.+O((B-B_c')^{2})\right], \qquad B>B_c' \qquad (12.52)$$

由上面的分析知道，空间均匀的布鲁塞尔振子系统(12.45)当 $B=B_c'$ 时在 $(X,\ Y)=(A,\ BA^{-1})$ 附近出现超临界的霍普夫分岔．

然后讨论空间非均匀情形．设空间是一维的，空间坐标为 x．(3.21)写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial t}=A-(B+1)X+X^{2}Y+D_{1}\dfrac{\partial^{2}X}{\partial x^{2}},\\ \dfrac{\partial Y}{\partial t}=BX-X^{2}Y+D_{2}\dfrac{\partial^{2}Y}{\partial x^{2}}.\end{cases} \qquad (12.53)$$

我们考虑(12.53)在区间 $0\leqslant x\leqslant l$ 上 $t\geqslant 0$ 的解，并取边界条件

$$X(0,\ t)=X(l,\ t)=A,$$
$$Y(0,\ t)=Y(l,\ t)=BA^{-1}. \qquad (12.54)$$

这时有一个空间均匀且与时间无关的解

$$X=A, \qquad Y=BA^{-1}. \qquad (12.55)$$

下面以它为基本解去研究与时间有关且空间非均匀的分岔解．

利用§10.3中的记号，取新变量 $u=X-A,\ v=Y-BA^{-1}$，方程(12.53)写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\Phi(u,\ v,\ B)=0, \qquad (12.56)$$

其中 Φ 见(10.37)．Φ 在 $(0,\ 0,\ B)$ 处的导算子矩阵为

$$\boldsymbol{L}(B)=D_{(u,v)}\Phi(0,\ 0,\ B)$$
$$=\begin{pmatrix}B-1+D_{1}\partial^{2}/\partial x^{2} & A^{2}\\ -B & -A^{2}+D_{2}\partial^{2}/\partial x^{2}\end{pmatrix}.$$

直接计算得知，在边界条件

$$u(0)=u(l)=v(0)=v(l)=0 \qquad (12.57)$$

下，$\boldsymbol{L}(B)$ 有特征值

$$\lambda_m^{\pm} = [a_m - b_m \pm \sqrt{(a_m + b_m)^2 - 4A^2B}\,]/2, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{12.58}$$

其中$a_m = B - 1 - m^2\pi^2 D_1/l^2$，$b_m = A^2 + m^2\pi^2 D_2/l^2$。相应的特征函数为

$$(u_m,\ v_m)^T = \sin \varkappa x (c_1,\ c_2)^T, \tag{12.59}$$

其中$\varkappa = m\pi/l$，c_1、c_2由线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} -a_m & -A^2 \\ B & b_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda_m^{\pm}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

求出。由(12.58)可见，当$(a_m + b_m)^2 - 4A^2B < 0$和$a_m - b_m = 0$时，即当

$$B = \widetilde{B}_m \equiv 1 + A^2 + \varkappa^2(D_1 + D_2) \qquad m \in \mathbb{N} \tag{12.60}$$

时，算子$\boldsymbol{L}(\widetilde{B}_m)$有纯虚共轭特征值. 图 12-2 给出$\widetilde{B}_m$的变化曲线。由于$\boldsymbol{L}(\widetilde{B}_m)$的特征值的实部为0，故$\widetilde{B}_m$的曲线也是基本解的线性稳定性的临界曲线。当$B > \widetilde{B}_m$时，基本解$(u,\ v) = (0,\ 0)$是不稳定的。在$B = \widetilde{B}_m$处都可能出现霍普夫分岔($m \in \mathbb{N}$)。我们特别关心在最小值$\widetilde{B}_1$处的情况。

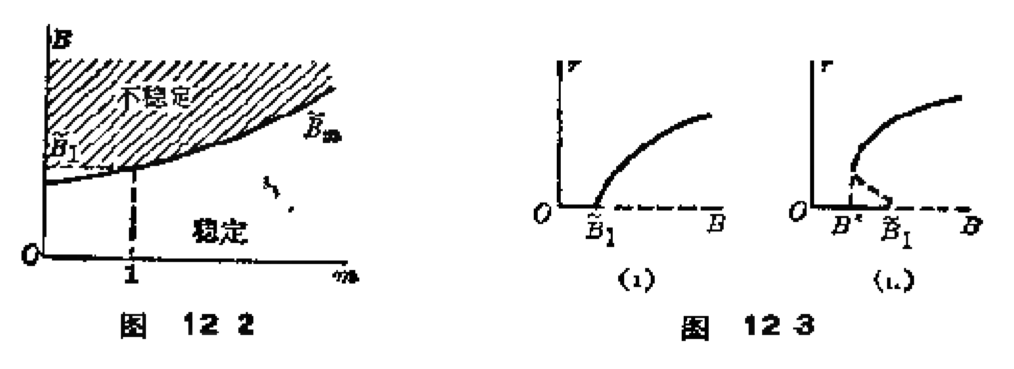


图 12-2　　　　图 12-3

我们可以利用中心流形方法，在$B = \widetilde{B}_1$附近将布鲁塞尔振子系统(12.56)约化为在二维的中心流形上的常微分方程组，然后用PB范式和霍普夫分岔定理进行研究[14]。我们也可以把(12.53)的解周期性地延拓到$-\infty < x < \infty$上，由x方向上的周期性条件和关于原点的对称性，可知延拓后的系统对空间有$\boldsymbol{O}(2)$对称性。此外，在考虑(12.53)的时间周期解时，它对时间有$\boldsymbol{S}^1$对称性。于是(12.53)的霍普夫分岔问题可以化为$\boldsymbol{O}(2) \times \boldsymbol{S}^1$对称系统的静态

分岔问题，并用对称性破缺和等变奇异性理论等进行研究。研究结果表明[14],[31]，在一定条件下，系统(12.53)在 $B=\widetilde{B}_1$ 处会出现通有霍普夫分岔。图 12.3(i)表示超临界霍普夫分岔，这时从基本解分出的时间周期解是稳定的；图 12.3(ii)表示亚临界霍普夫分岔，这时从基本解分出的时间周期解是不稳定的，而且这个不稳定时间周期解会在某个 B^* 处折返，并变为有较大振幅的稳定时间周期解。

我们还可用奇异摄动法求出在 $\widetilde{B}_1$ 附近的霍普夫分岔解的表达式。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\left(\frac{B-\widetilde{B}_1}{\varphi}\right)^{1/2}\sin\frac{\pi x}{l}\begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ \widetilde{B}_1\cos(\Omega t+\theta) \end{pmatrix} +O(|B-\widetilde{B}_1|). \tag{12.61}$$

其中 $\varphi=\varphi(A, D_1, D_2, l)$ 是某个确定的函数，

$$\Omega=\sqrt{4A^2B-(a_1+b_1)^2},$$

a_1、b_1 见(12.58)。由此可见，当 $\varphi\neq0$ 时，在 $B=\widetilde{B}_1$ 附近出现的霍普夫分岔解的主部有空间模态 $c\sin(\pi x/l)$，且以角频率 Ω 随时间作周期振动，故呈现持续振荡的驻波形式的时空周期结构。当 $\varphi>0$ 时，霍普夫分岔是超临界的；而当 $\varphi<0$ 时，它是亚临界的。

[例 2]　洛伦兹系统的霍普夫分岔

考虑由(3.13)给出的洛伦兹系统。取 r 为分岔参数。容易见到，此系统对一切 $r\in\mathbb{R}$ 有平衡点 $(X, Y, Z)=(0, 0, 0)$；此外，对 $r>1$ 还有两个非平凡平衡点 $(\pm s, \pm s, r-1)$，其中

$$s=\sqrt{b(r-1)}.$$

在 $r=1$ 处出现平衡点的超临界叉形分岔。

下面要指出，随着 r 进一步增大，在非平凡平衡点处会出现霍普夫分岔。由于洛伦兹系统(3.13)在变换

$$(X, Y, Z)\mapsto(-X, -Y, Z)$$

下保持不变，即此系统关于 Z 轴有反射对称性，因此只需考虑平衡点 $(s, s, r-1)$（这里 $r>1$）。直接计算表明，在该处的导算子矩阵为

$$L(r)=\begin{pmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ 1 & 1 & s(r) \\ s(r) & s(r) & -b \end{pmatrix}, \qquad (12.62)$$

其特征多项式为

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(L-\lambda I) \\ &= -\lambda^3-(1+b+\sigma)\lambda^2-(b+b\sigma+s^2)\lambda+2s^2\sigma. \end{aligned} \qquad (12.63)$$

考虑到在霍普夫分岔点处，$L(r)$应有一对纯虚共轭特征值 $\pm i\beta$，并记第三个特征值为 α，则特征多项式可写成

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -(\lambda^2+\beta^2)(\lambda+\alpha) \\ &= -\lambda^3-\alpha\lambda^2-\beta^2\lambda-\alpha\beta^2. \end{aligned} \qquad (12.64)$$

比较(12.63)和(12.64)中 λ 的同次幂的系数，可知在霍普夫分岔点处有

$$\alpha=1+b+\sigma, \qquad \beta^2=b-b\sigma+s^2,$$

$$\alpha\beta^2=-2s^2\sigma.$$

由此解得

$$s^2=-\frac{(1+b-\sigma)(1-\sigma)b}{1+b+\sigma},$$

$$\beta=\sqrt{b-b\sigma+s^2}.$$

考虑到 $s^2=b(r-1)$，便求得霍普夫分岔出现时的参数值

$$r=r_0\equiv\frac{\sigma(3+b-\sigma)}{1+b+\sigma}.$$

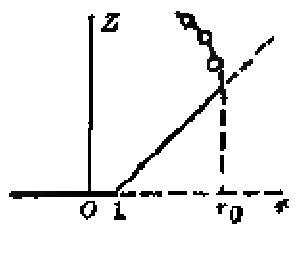


图 12-4

可以证明，在 r_0 处出现的霍普夫分岔是亚临界的，从非平凡平衡点产生的极限环是不稳定的，相应的分岔图见图12-4，图上带圆圈的曲线代表周期解.

§13 其他动态分岔

除了霍普夫分岔，还有许多其他形式的动态分岔. 这里通过

几个重要的模型说明之.

[例 1]　洛伦兹系统的分岔.

洛伦兹系统可以出现多种形式的分岔. 考虑下面的系统

$$\begin{cases}\dot{x}=10(y-x),\\ \dot{y}=rx-y-xz,\\ \dot{z}=xy-8z/3\end{cases}\tag{13.1}$$

的一些数值计算结果[29].

当 $r<1$ 时, 原点是唯一的渐近稳定平衡点. 在 $r=1$ 处, 原点成为非双曲平衡点, 并出现平衡点的超临界叉形分岔. 当 $r>1$ 时, 原点是不稳定平衡点, 与此同时分出两个平衡点 $O_1(s,\ s,\ r-1)$ 和 $O_2(-s,\ -s,\ r-1)$, 其中 $s=2\sqrt{2(r-1)/3}$. 对 $r>1$, 原点有一维不稳定流形 $W^u(O)$ 和二维稳定流形 $W^s(O)$. 当 $r=r'\approx 13.926$ 时, $W^u(O)$ 与 $W^s(O)$ 相交, 并形成两个同宿环, 它们是关于 z 轴对称的(见图 13.1). 当 $r>r'$ 时, 同宿环破裂, 并分出无限多条有任意周期的闭轨. 这些闭轨连同无限多条非闭轨线一起, 包含在一个有界不变集里面. 这种现象称为"同宿爆炸", 它是洛伦兹系统的复杂动力学性态的一个根源.

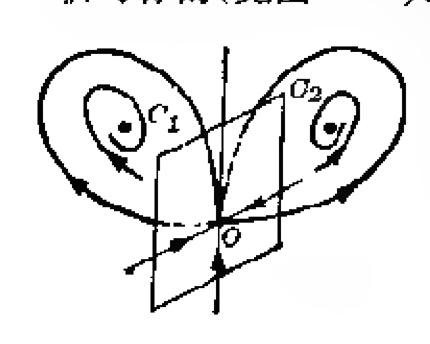


图 13.1

在 $r=r_H\approx 24.74$ 处, 平衡点 O_1 和 O_2 是非双曲的. 此时出现亚临界霍普夫分岔(参看 § 12). 在 $r'<r<r_H$ 内有不稳定的闭轨 Γ_1 和 Γ_2. 当 $r>r_H$ 时, 所有三个平衡点都是不稳定的. 此外, 从 $r=r_A\approx 24.06$ 起, 系统(13.1)出现一个奇怪吸引子, 它在 $r>r_H$ 且 r 接近 r_H 的范围内成为一个奇怪不变集, 呈现混沌性态. 为了深入了解同宿爆炸所产生的闭轨随 r 变化的情况, 下面将讨论洛伦兹系统的倍周期分岔.

对 $r>313$, 系统(13.1)只有一条稳定闭轨 Γ_∞, 它是关于 z 轴对称的. 这时仍有三个平衡点: O, O_1 和 O_2. 在 $r\approx 313$ 处, Γ_∞ 成

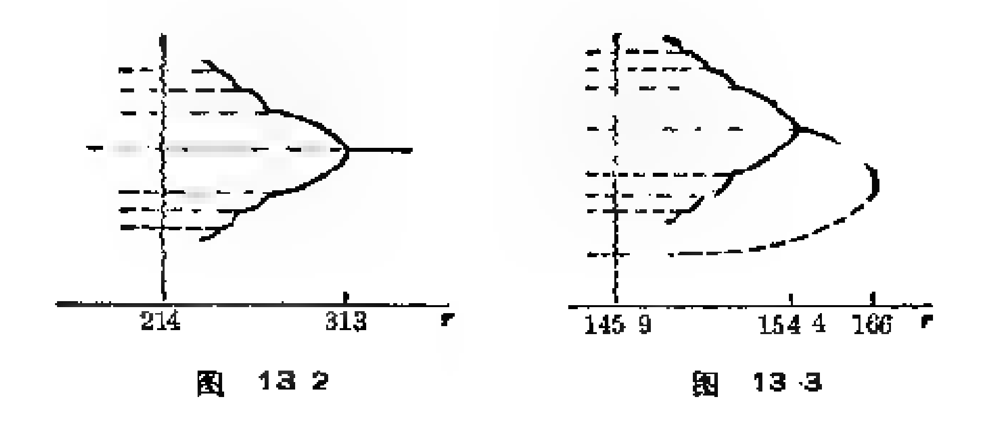


图 13 2　　　　图 13 3

为非双曲闭轨，并出现叉形分岔．当 $r<313$ 时，Γ_{∞} 是不稳定的，还有两条稳定的非对称闭轨 Γ_1 和 Γ_1'，它们关于 z 轴是对称的．当 $r\approx 224$ 时，Γ_1 和 Γ_1' 开始失稳，并出现倍周期分岔，即从 Γ_1 和 Γ_1' 分别产生周期加倍的稳定闭轨 Γ_2 和 Γ_2'．当 $r\approx 218$ 时，Γ_2 和 Γ_2' 开始失稳，再次出现倍周期分岔．随着 r 继续减少，还有更多的倍周期分岔出现，形成一个以 $r=r^*\approx 214$ 为终结的无限倍周期分岔序列(见图 13 2)．它有通常倍周期分岔序列的普适标度性质，例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_{n-1}-r_n}{r_n-r_{n+1}}=\delta=4.6992\cdots$，其中 r_n 是第 n 次倍周期分岔出现时的参数值．系统(13.1)在 $r=r^*$ 处进入混沌状态，随着 r 的进一步减少，还会出现倒分岔和从混沌到周期运动的阵发过渡．

数值计算表明，洛伦兹系统还有其他的倍周期分岔序列．例如在 $r\approx 166$ 处出现闭轨的鞍结分岔．对 $r<166$ 有两条对称闭轨，其中一条是稳定的，另一条是不稳定的．稳定闭轨在 $r\approx 154.4$ 处出现叉形分岔，并随着 r 的进一步减少，出现一个以 $r=r^{**}\approx 145.9$ 为终结的另一个倍周期分岔序列(见图 13-3)．在 $25<r<145$ 的范围内，系统(13.1)也有许多倍周期分岔、同宿爆炸和混沌现象．在前述的鞍结分岔、叉形分岔和倍周期分岔序列中产生的闭轨中，有些可以随着 r 减少一直持续到 $r=r'$(即第一次同宿爆炸)处，其他则随着 r 的减少或增加而终结于其他的同宿爆炸处．

顺便指出，什尔尼科夫法[11]在研究与同、异宿轨线有关的分岔和混沌现象中有重要作用．

[例 2] 有参数激励和其他激励的振动系统的分岔.

考虑有参数激励和自激励的单自由度振动系统

$$\ddot{u}+2\varepsilon(\mu+\nu u^2)\dot{u}+(\omega^2+\varepsilon\alpha\cos\Omega t)u=0, \tag{13.2}$$

其中 $u=u(t)$, ε 是小量, ω 和 Ω 是正常数, μ、ν 和 α 是参数, 且 $\alpha>0$.

我们先用多重尺度法建立振幅和相位的近似方程[61]. 取两个时间尺度: $T=t$, $\tau=\varepsilon t$, 并寻求(13.2)的下列渐近展开解:

$$u(t,\ \varepsilon)=u_0(T,\ \tau)+\varepsilon u_1(T,\ \tau)+\cdots\cdots. \tag{13.3}$$

把(13.3)代入(13.2), 并比较 ε 的同次幂的系数, 可得[62]

一阶近似方程

$$D_0^2u_0+\omega^2u_0=0, \tag{13.4}$$

二阶近似方程

$$\begin{aligned}D_0^2u_1&+2D_0D_1u_0+2(\mu+\nu u_0)D_0u_0\\&+\omega^2u_1+(\alpha\cos\Omega T)u_0=0,\end{aligned} \tag{13.5}$$

其中 $D_0=\partial/\partial T$, $D_1=\partial/\partial\tau$. (13.4)的解为

$$u_0=A(\tau)e^{i\omega T}+cc, \tag{13.6}$$

其中 $A(\tau)$是待定函数, cc. 代表前面部分的复共轭. 把(13.6)代入(13.5), 可以见到当 $\Omega\approx2\omega$ 时此系统出现共振(通常称之为主共振). 引进解谐参数 σ, 使得 $\Omega=2\omega+\varepsilon\sigma$. 根据消除长期项的要求, 便得到 $A(\tau)$ 的方程:

$$2i\omega(A'+\mu A+\nu A^2\bar{A})+(\alpha\bar{A}/2)e^{i\sigma\tau}=0, \tag{13.7}$$

其中 $\bar{A}$ 是A的复共轭, 撇号"$'$"表示对 τ 求导.将 A 写成极坐标形式

$$A(\tau)=a(\tau)e^{i\varphi(\tau)}. \tag{13.8}$$

将(13.8)代入(13.7), 并分开实部和虚部, 得到

$$a'+\mu a+\nu a^3+(\alpha a/4\omega)\sin(\sigma\tau-2\varphi)=0, \tag{13.9}$$

$$a\varphi'-(\alpha a/4\omega)\cos(\sigma\tau-2\varphi)=0. \tag{13.10}$$

令 $\xi=a^2$, $\eta=\sigma\tau-2\varphi$, 则(13.9)和(13.10)成为

$$\xi'+2\mu\xi+2\nu\xi^2+(\alpha\xi/2\omega)\sin\eta=0, \tag{13.11}$$

$$\xi[\eta'-\sigma+(\alpha/2\omega)\cos\eta]=0. \tag{13.12}$$

它们就是振幅和相位的一阶近似方程.

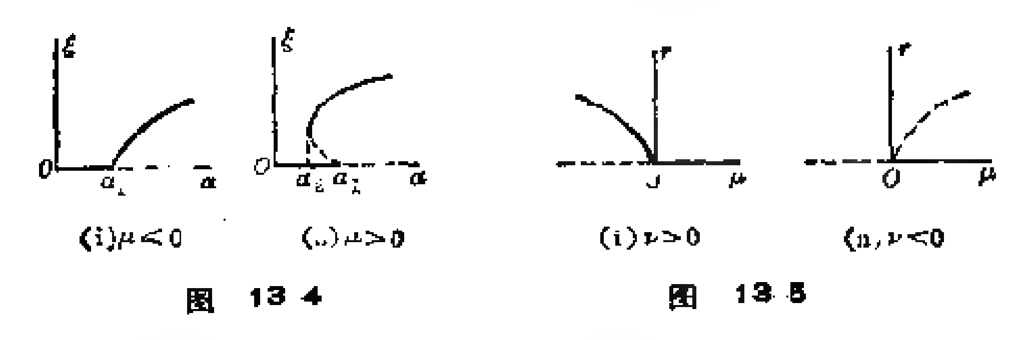
接着分析系统(13.2)的分岔情况. 易见,(13.11)、(13.12)有一个平凡解 $\xi=0$,它对应着原系统(13.2)的平衡状态 $u=0$. 此外,(13.11)、(13.12)有非平凡静态解

$$\begin{aligned}\xi&=[\pm(\alpha^2-4\sigma^2\omega^2)^{1/2}/(4\omega)-\mu]/\nu,\\ \eta&=\arccos(2\omega\sigma/\alpha).\end{aligned} \tag{13.13}$$

图13-4给出(13.11)、(13.12)的静态分岔和稳定性分析结果, 其中取 α 为分岔参数, $\alpha_1=2\omega(\sigma^2+4\mu^2)^{1/2}$, $\alpha_2=2|\sigma|\omega$. 由于原系统(13.1)的解可写成

$$\begin{aligned}u&=a(\tau)^{1/2}e^{i(\omega T+\alpha(\tau))}+\text{cc.}+O(\varepsilon)\\ &=2[\xi(\varepsilon t)]^{1/2}\cos[(\Omega/2)t+\eta(\varepsilon t)/2]+O(\varepsilon),\end{aligned} \tag{13.14}$$

图13-4表明原系统(13.2)在 α_1 处出现霍普夫分岔和在 α_2 处出现周期解的鞍结分岔.



(i) $\mu<0$　　(ii) $\mu>0$　　(i) $\nu>0$　　(ii) $\nu<0$

图 13-4　　图 13-5

我们接着讨论(13.11)、(13.12)的霍普夫分岔. 利用霍普夫分岔定理可以证明,如果 $|\sigma|>\alpha/2\omega$, 则(13.11)(13.12)在 $\mu=0$ 处从平凡解处产生霍普夫分岔. 当 $\nu>0$(或 $\nu<0$)时, 对 $\mu<0$(或 $\mu>0$)存在稳定(或不稳定)的周期解, 它当 $\mu\to0$ 时趋于平凡解. 图13-5给出(13.11)、(13.12)的霍普夫分岔结果. 由(13.14)可知, (13.11)、(13.12)的关于 τ 的频率为 ω^* 的周期解对应原系统(13.2)的关于 t 的频率为 $\Omega/2$ 与 $\varepsilon\omega^*$ 的二维环面解(即 T^2 解), 因此(13.2)当 $|\sigma|>\alpha/2\omega$ 时在 $\mu=0$ 处出现二维环面分岔. 应当指出,如果在(13.2)中有多频参数激励, 那么在该系统中还会出现

更高维数的环面分岔[62]. 此外, 在[63]、[64]中还讨论了在参数激励和强迫激励联合作用下两自由度的非线性耦合振子系统的一次和二次分岔问题, 在那里使用KBM法去建立平均方程, 然后用无对称性和有Z_2对称性的奇异性理论进行分析. [65]研究了非线性马休(E.L.Mathieu)方程的1/2次谐分岔行为. 首先用LS方法求出分岔方程, 然后考虑一次近似的分岔特性和给出分岔方程系数的计算方法, 最后讨论分岔方程的高次近似和普适开折问题.

[例3] 强迫杜芬振动系统的分岔

当非线性振子受到外界周期力的作用, 特别是外力较大时, 会产生多种形式的动力学响应. 主要有:

1. 周期运动, 包括谐振动解、亚谐振动解和超谐振动解等, 有时还会有多个周期运动共存;

2. 准周期运动;

3. 非周期运动, 特别是混沌运动.

当参数变化时, 存在不同运动形式之间的跃迁和分岔现象.

单自由度强迫杜芬振动系统的标准形式是

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+\alpha x+\beta x^3=F\cos\Omega t,\qquad x\in\mathbb{R}\quad(13.15)$$

其中α可取0, 1或-1, β可取1或-1. 系统(13.15)有三个参数: μ、F和Ω, 它有很丰富的动力学行为, 至今尚未被人们完全认识. 在系统(13.15)中, 软弹簧系统

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+x-x^3=F\cos\Omega t\quad(13.16)$$

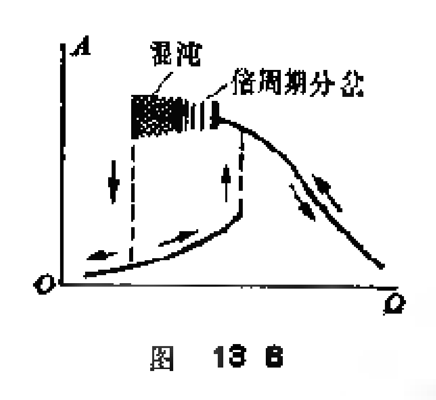


图 13.6

的动力学行为最复杂. 这里给出当$\mu=0.4$、$F=0.23$时的一些数值结果. 如果强迫力频率Ω从比固有频率$\omega_0=1$小得多的数值开始增加, 则强迫振动周期解的振幅A大致沿摄动法得到的幅频曲线变化, 并有突跃发生(见图13.6). 然而, 当Ω从较大的数值开始减小时, 情况就很复杂了. 首先, 在$\Omega\approx0.535$处出现由对称性破缺引起的叉形

分岔，即周期为 $T=2\pi/\Omega$ 的大振幅对称解分裂为两个有同样周期 T 的非对称解．然后，在 $0.5268<\Omega<0.53$ 的范围内观察到多个倍周期分岔序列，此外还有周期窗口和混沌带．这些都以两个共存非对称状态的形式出现．值得注意的是，当 Ω 减小到 0.5268 时，两个非对称的混沌状态重新汇合为一个对称的混沌状态．再经过若干次相继的分岔，当 $\Omega\approx0.5252$ 时，系统又经过突跃回复到一个对称的小振幅周期运动状态．

§14　动态分岔的普适开折

动态分岔研究与静态分岔一样，也需要讨论扰动对分岔性态的影响．如果动态分岔是退化的，就要利用普适开折去描述受扰后可能出现的各种分岔状态。

§14.1　预备知识

设映射 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，我们把有序组

$$J^k_{x_0}(f)=(x_0,\ f(x_0),\ Df(x_0),\ \cdots,\ D^kf(x_0))\qquad x_0\in\mathbb{R}^n \tag{14.1}$$

称为 f 在 x_0 处的 k 射式（k-jet），其中 $D^if(x_0)$ 是 i 阶导算子（$i=1,\cdots,k$）．$\mathbb{R}^n$ 上的全部 C^∞ 映射在一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的 k 射式集合构成一个有限维线性空间，记为 $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$。

［例 1］　$J^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\cong\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 是 n^2 维的．

［例 2］　$J^1(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1)$ 是 3 维的，因为它的元素有坐标 $(x,f(x),f'(x))$．

［例 3］　$J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ 是 8 维的，因为它的元素有坐标 $(x,f(x),Df(x))$，其中 x，$f(x)$ 是 2 维向量，$Df(x)$ 是 2×2 矩阵．

对每个映射 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，定义映射

$$\hat{f}:\mathbb{R}^n\to J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m),\qquad x\mapsto J^k_x(f)=\hat{f}(x). \tag{14.2}$$

$\hat{f}$ 称为 f 的"k 射式扩张"（k-jet extension）。

设映射 $g\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 和子流形 $M\subset\mathbb{R}^m$. 对 $x\in\mathbb{R}^n$, 或者 $g(x)\notin M$, 或者当 $g(x)\in M$ 时切空间 $T_{g(x)}M$ 与 $T_x\mathbb{R}^n$ 在 $Dg(x)$ 作用下的象是横截的, 即

$$Dg(x)\cdot T_x\mathbb{R}^n+T_{g(x)}M=T_{g(x)}\mathbb{R}^m, \tag{14.3}$$

则称映射 g 与流形 M 在 x 处是横截的. 如果在任何 $x\in\mathbb{R}^n$ 处映射 g 与流形 M 都是横截的, 则称"g 与 M 横截".

定理(托姆横截性定理) 设 E 是 $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$的一个子流形. 若 S 为 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$中如下映射 f 的集合: 其 k 射式扩张 $\hat{f}$ 皆与 E 横截, 则 S 是可数个在 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$中稠密的开子集的交, 即 S 是 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$的一个剩余子集(residual subset).

上述定理表明, 集 S 的横截性在 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$中是通有的(见附录第 161 页). 我们根据映射在有限维空间 $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$中的几何性质, 就能得出它们在无限维空间$C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$中的结果.

接着介绍向量场的平衡点余维数的概念(对映射的不动点, 也有类似的结果). 考虑系统

$$\dot{x}=f(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

其中向量场 $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. 由于局部分岔涉及非双曲平衡点, 因此除了 k 射式空间 $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$外, 还要用到它的两个子集 F 和 B: F 是由全体有平衡点的向量场的 k 射式组成的, B 是由全体有非双曲平衡点的向量场的 k 射式组成的. 在 $J^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$中, F 的余维数为 n, B 的余维数为 $n+1$. 应当注意, 虽然 F 和 B 的余维数与 k 无关, 但它们的维数与 k 有关.

[例 4] 考虑向量场空间 $C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$. 这时 $J^k(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$的维数为 $k+2$, 它的元素是

$$(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(k)}(x)). \qquad x\in\mathbb{R}^1, f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$$

F 的维数为 $k+1$(即余维数为 1), 它的元素是

$$(x, 0, f'(x), \cdots, f^{(k)}(x)). \qquad x\in\mathbb{R}^1, f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$$

B 的维数为 k(即余维数为 2), 它的元素是

$$(x, 0, 0, f''(x), \cdots, f^{(k)}(x)). \qquad x\in\mathbb{R}^1, f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$$

［例 5］ 考虑向量场空间 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$．这时 $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 的元素是

$$(x, f(x), Df(x), \cdots, D^k f(x)), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

F 的元素是

$$(x, 0, Df(x), \cdots, D^k f(x)), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

B 的元素是

$$(x, 0, \widetilde{D}f(x), \cdots, D^k f(x)), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

其中 $\widetilde{D}f(x)$ 是一个非双曲的 $n\times n$ 矩阵，在其特征值中至少有一个的实部为 0．

设向量场 $g(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有平衡点 x_0．取 E 为 F 中有与 g 在 x_0 处相同的导数退化条件的 k 射式组成的子集．设 E 在 $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 中的余维数为 d；此外，前面已经知道 F 在 $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 中的余维数为 n．我们定义 g 的"平衡点 x_0 的余维数"为 $d-n$．显然，对双曲平衡点，有 $E=F$，从而它的余维数为 0；而对非双曲平衡点有 $E\subsetneqq F$，其余维数大于 0．于是，我们可用平衡点的余维数去衡量向量场在该处的退化程度．为了在确定集 E 时能考虑在平衡点处的全部退化条件（即导数满足的条件），k 应取足够大的数值．此外，还应注意到对集 E 的元素只有在平衡点的导数方面的限制，但平衡点的位置一般是可以变动的．

［例 6］ 考虑向量场

$$\dot{x}=g_1(x)\equiv ax^2+O(x^3) \qquad a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^1 \quad (14.4)$$

在非双曲平衡点 $x_0=0$ 处的导数，有 $g_1'(x_0)=0$，$g_1''(x_0)=2a\neq 0$．于是，取集 E 的元素为 $(k\geqslant 2)$

$$(x, 0, 0, f''(x), \cdots, f^{(k)}(x)), \qquad x\in\mathbb{R}^1,\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$$

显然，E 就是例 4 中的集 B，其余维数 $d=2$．因此（14.4）的平衡点 $x_0=0$ 的余维数为 1．

［例 7］ 考虑向量场

$$\dot{x}=g_2(x)=ax^3+O(x^4), \qquad a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^1 \quad (14.5)$$

在非双曲平衡点 $x_0=0$ 处的导数有 $g_2'(x_0)=g_2''(x_0)=0$，$g_2'''(x_0)$

$6a\neq 0$. 于是，取集 E 的元素为 $(k\geqslant 3)$

$$(x,\ 0,\ 0,\ 0,\ f'''(x),\ \cdots,\ f^{(k)}(x)),\qquad x\in\mathbb{R}^1,\ f\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$$

集 E 的余维数 $d=3$，从而(14.5)的平衡点 $x_0=0$ 的余维数为 2.

［例 8］ 考虑向量场

$$\dot{\boldsymbol{x}}=g_3(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+O(\|\boldsymbol{x}\|^2),\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2 \quad (14.6)$$

可以证明[66]，当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & \omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}$，$\omega\neq 0$ 时，(14.6)的平衡点 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 的余维数至少为 1；当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 时，该平衡点的余维数至少为 2. 我们还要根据高阶项的退化情况，才能完全确定平衡点的余维数.

应当注意，在上面的平衡点余维数定义中，并未考虑向量场的对称性的作用. 对于有对称群 Γ 的向量场，我们可以像 §11 那样，引进平衡点的 Γ 余维数的概念.

§14.2 局部向量场的普适开折

设向量场 $g(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 如果有含参数 $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^m$ 的向量场 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\mu})\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)$，使得 $G(\boldsymbol{x},\ 0)=g(\boldsymbol{x})$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，则称 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\mu})$ 是 $g(\boldsymbol{x})$ 的一个 $\boldsymbol{m}$ **参数开折**，$\boldsymbol{\mu}$ 称为**开折参数**. 如果对 g 的任何一个开折 $\widetilde{G}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^l,\ \mathbb{R}^n)$（其中开折参数 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^l$），存在连续映射 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$，$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$，且 $\varphi(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，使得对一切 $\boldsymbol{\lambda}\in I\subset\mathbb{R}^l$（其中 I 是原点的邻域），向量场 $\widetilde{G}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ 与 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}),\ \varphi(\boldsymbol{\lambda}))$ 是拓扑等价的，则称 $G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\mu})$ 是 $g(\boldsymbol{x})$ 的一个**普用开折**. 在 g 的所有普用开折中，含开折参数最少的称为**普适开折**. g 的普适开折一般不是唯一的. g 的普适开折中所含开折参数的个数，称为"向量场 $g(\boldsymbol{x})$ 的余维数"†. 对于在平衡点附近的局部向量场，同样可以引入普适开折的概念. 局部向量场的普适开折中开折参

† 这里的余维数是对无参数向量场定义的，而 §9 的余维数是对单参数向量场定义的，二者之间相差 1.

数个数，就是平衡点的余维数。与静态分岔研究一样，在动态分岔研究中，向量场的普适开折以最简单的方式包含了对向量场的所有扰动，从而可用来分析受扰后一切可能的动态分岔性态。由于向量场全局分析的困难，这里只讨论在平衡点附近的局部向量场(特别是其 PB 范式)的普适开折问题。

设向量场 $g(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 有非双曲平衡点 x_0，我们可按以下步骤求在该平衡点附近向量场的 PB 范式的普适开折：

1．在平衡点附近用中心流形方法将动力系统降维，得到约化系统。

2．确定平衡点 x_0 的余维数 m。

3．求约化系统的 PB 范式，取 r 阶截断 $g_r(x)$。

4．取开折参数 $\mu\in\mathbb{R}^m$，构造 $g_r(x)$ 的一个 m-参数开折 $G(x,\ \mu)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)$，使得其 k 射式扩张 $\hat{G}(x,\ \mu)$ 在 $J^k(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)$ 中与反映 $g(x)$ 在 x_0 处的退化条件的向量场 k 射式集合 E 是横截的。由托姆横截性定理知道，该 m-参数开折的横截性在向量场空间 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}^n)$ 中是通有的。

5．证明 $G(x,\ \mu)$ 在 x_0 附近确实是向量场 $g(x)$ 的 PB 范式 $g_r(x)$ 的一个普适开折。

由于上面的第 4 步只考虑平衡点性质，其本质是静态的，没有涉及向量场的动态特性(如闭轨、同宿或异宿环等)，因此第 5 步的证明是必要的。对于一维向量场，非游荡集仅由平衡点组成，第 4 步得到的 m-参数开折对动态问题来说也应当是普适开折。然而，对于高维向量场，情况就不是那么简单了，第 4 步的 m-参数开折并不一定是动态分岔的普适开折，有时甚至不存在动态分岔的普适开折。

［例 9］ 考虑向量场

$$\dot{x}=g(x)=ax^2+O(x^3),\qquad a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^1 \tag{14.7}$$

在平衡点 $x_0=0$ 附近的普适开折问题。由例 6 知道，$x_0=0$ 是 (14.7) 的余维数为 1 的退化平衡点。(14.7) 已是 PB 范式，取其

2 阶截断式

$$\dot{x} = g_2(x) = ax^2. \tag{14.8}$$

(14.8)的一个 1-参数开折是

$$\dot{x} = G(x, \mu) \equiv \mu + ax^2, \qquad \mu \in \mathbb{R}^1 \tag{14.9}$$

考虑2 射式空间 $J^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$，其元素是

$$(x, \mu, f, f_x, f_\mu, f_{xx}, f_{x\mu}, f_{\mu\mu}), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$$

并取满足 $g_2(x)$ 在平衡点的退化条件的子集 E，其元素是

$$(x, \mu, 0, 0, f_\mu, f_{xx}, f_{x\mu}, f_{\mu\mu}), \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$$

现在证明在 $J^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ 中，$G(x, \mu)$ 的 2 射式扩张 $\hat{G}(x, \mu)$（即 $J^2_{x,\mu}(G)$）与子流形 E 是横截的．事实上，当 $(x, \mu) \neq (0, 0)$ 时有 $\hat{G}(x, \mu) \notin E$；而当 $(x, \mu) = (0, 0)$ 时，$\hat{G}(0, 0) \in E$．简记 $\hat{G}(0, 0)$ 为 p，直接计算得知

$$D\hat{G}(0, 0) \cdot T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 + T_pE = \mathbb{R}^8 = T_pJ^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1).$$

于是，由托姆横截性定理知道，1-参数开折 $G(x, \mu)$ 与退化向量场集合的横截性是通有的．

我们指出，$G(x, \mu)$ 确实是向量场 $g_2(x)$ 在 $x=0$ 附近的一个普适开折．设 $F(x, \lambda) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R})$ 是 $g_2(x)$ 的一个开折．考虑系统

$$\dot{x} = F(x, \lambda), \qquad x \in \mathbb{R}, \ \lambda \in \mathbb{R}^l \tag{14.10}$$

因 $F(x, 0) = g_2(x) = ax^2$，显见 $F(0, 0) = F_x(0, 0) = 0$，$F_{xx}(0,0) = 2a \neq 0$．为确定起见，设 $a>0$（对 $a<0$，可作类似的讨论）．根据马尔格朗奇(B. Malgrange)预备定理（例如见[13]）得知

$$F(x, \lambda) = (\xi(\lambda) + \eta(\lambda)x + x^2)f(x, \lambda), \qquad x \in U, \ \lambda \in V$$

其中 $\xi(\lambda)$、$\eta(\lambda) \in C^\infty(V, \mathbb{R})$，$f(x, \lambda) \in C^\infty(U \times V, \mathbb{R})$，且 $\xi(0) = \eta(0) = 0$，$f(0, 0) = a/2$，$U \subset \mathbb{R}$ 和 $V \subset \mathbb{R}^l$ 都是包含原点的某邻域．由于 $a>0$，我们可设对 $(x, \lambda) \in U \times V$ 有 $f(x, \lambda) > 0$．于是系统(14.10)与下列系统在 $U \times V$ 中拓扑等价．

$$\dot{x} = \xi(\lambda) + \eta(\lambda)x + x^2, \qquad (x, \lambda) \in U \times V \tag{14.11}$$

令 $x=\sqrt{a}y+\eta(\lambda)/2, \mu=\xi(\lambda)-\eta^2(\lambda)/4$，则(14.11)可写成

$$\dot{y}=\mu+ay^2. \tag{14.12}$$

由此可见，向量场 $G(x, \mu)$(即系统(14.9)) 与 $F(x, \lambda)$(即系统(14.10))是拓扑等价的，从而 $G(x, \mu)$是 $g_2(x)$的一个普适开折。其实，我们同样可以证明 $G(x,\mu)$是 $g(x)$(即原系统(14.7))的一个普适开折. 在非退化条件 $a\neq 0$ 下，系统(14.9)在$(x, \mu)=(0, 0)$处出现鞍结分岔(即极限点分岔). 这里的结果表明，余维数为1的鞍结分岔在扰动的作用下有保持性，即单参数向量场族的鞍结分岔是通有的.

[例 10] 考虑向量场

$$\begin{cases}\dot{x}=-\omega y+O(r^2),\\ \dot{y}=\omega x+O(r^2),\end{cases} \quad (x, y)\in\mathbb{R}^2 \tag{14.13}$$

其中 $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, $\omega\in\mathbb{R}$ 是常数.

由 §8 的例 3 知道，(14.13)的一个 3 阶截断 PB 范式是† (见(8.41))

$$\begin{cases}\dot{x}=-\omega y+(ax-by)(x^2+y^2),\\ \dot{y}=\omega x+(bx+ay)(x^2+y^2).\end{cases} \tag{14.14}$$

可以证明，在平衡点保持在原点不动的条件下，$(x, y)=(0, 0)$是(14.13)的余维数为 1 的退化平衡点.

在极坐标中，(14.14)写成

$$\begin{cases}\dot{r}=ar^3,\\ \dot{\theta}=\omega+br^2.\end{cases} \tag{14.15}$$

在 $r=0$ 附近，$\theta(t)$随 t 单调变化，因此(14.15)的动态行为取决于第一个方程. 一般地说，当 $a\neq 0$ 时，(14.15)的第一个方程在 $r=0$ 附近的一个普适开折是

$$\dot{r}=\mu_1+\mu_2 r+ar^3. \tag{14.16}$$

然而，考虑到平衡点保持在原点的要求，我们必须取 $\mu_1=0$. 记 $\mu_2=\mu$, (14.16)写成

† 其实它也是一个 4 阶截断 PB 范式。

$$\dot{r}=\mu r+ar^3, \qquad \mu\in\mathbb{R} \tag{14.17}$$

(14.17)连同(14.15)的第二个方程一起，组成(14.15)的一个普适开折. 回到直角坐标，就得到3阶PB范式的一个普适开折

$$\begin{cases}\dot{x}=\mu x-\omega y+(ax-by)(x^2+y^2),\\ \dot{y}=\omega x+\mu y+(bx+ay)(x^2+y^2).\end{cases} \tag{14.18}$$

霍普夫分岔定理指出，在非退化条件 $a\neq 0$ 下，系统(14.18)在 $\mu=0$ 处出现通有霍普夫分岔. 这里的结果表明，余维数为1的通有霍普夫分岔在扰动的作用下有保持性，即单参数向量场族的通有霍普夫分岔是通有的.

[例 11] 考虑向量场

$$\begin{cases}\dot{x}=y+O(r^2),\\ \dot{y}=O(r^2),\end{cases} \qquad (x,\ y)\in\mathbb{R}^2 \tag{14.19}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

由§8的例2知道，(14.19)的一个2阶截断PB范式是(见(8.32))

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=axy+bx^2.\end{cases} \tag{14.20}$$

可以证明，当 $a\neq 0$、$b\neq 0$ 时，$(x,\ y)=(0,\ 0)$ 是(14.20)的余维数为2的退化平衡点. 这时，(14.20)在 $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 附近的一个普适开折是[67]

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\mu_1+\mu_2 y+axy+bx^2,\end{cases} \tag{14.21}$$

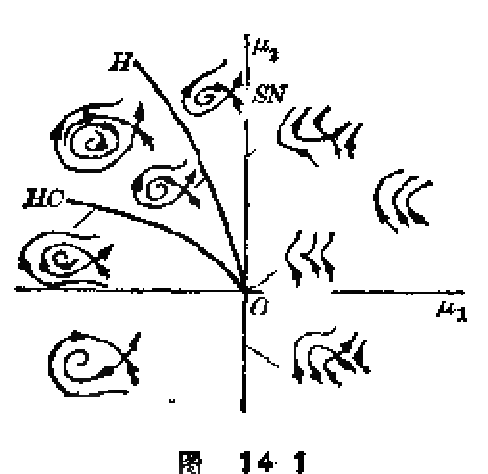


图 14-1

其中参数 $(\mu_1,\ \mu_2)\in\mathbb{R}^2$. 图14-1描述了系统(14.21)在 $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 附近的局部动力学性态随参数变化的情况. 在参数 (μ_1,μ_2) 平面上，下列分界线

$$SN:\ \ \mu_1=0, \qquad (\mu_2\neq 0)$$

$$H: \quad \mu_1 = -\mu_2^2, \qquad (\mu_2 > 0)$$

$$HC: \mu_1 = -(49/25)\mu_2^2 + O(\mu_2^3) \qquad (\mu_2 > 0)$$

将平面分成四个区域. 当(μ_1, μ_2)在这些区域内部时, (14.21)的相图在小扰动下不会改变, 系统是结构稳定的. 而当(μ_1, μ_2)在上述分界线上时, 系统是结构不稳定的. 分界线SN对应平衡点的鞍结分岔(即极限点分岔), H对应霍普夫分岔, HC对应同宿轨线分岔. 由于同宿轨线分岔是全局分岔, 这里的结果表明局部分岔分析有时也可以导致全局的结果.

上面讨论了局部向量场的PB范式的普适开折问题, 它们是向量场分岔研究的简化模型. 虽然我们还未能清楚地知道PB范式与原系统的分岔性态之间的一般关系, 但是在一些情形中, 可以证明PB范式完全反映原系统的动力学定性性态. 这种PB范式称为普用PB范式. 在满足所述的非退化条件下, 例9至例11的PB范式都是普用的, 它们的普适开折就是原系统的普适开折.

最后介绍在非双曲平衡点附近的局部向量场的分类问题. 考虑向量场

$$\dot{\boldsymbol{x}} = g(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \qquad (14.22)$$

其中$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$是非双曲平衡点, 即$g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, 且$Dg(\mathbf{0})$有实部为零的特征值. 一般地说, 向量场$g(\boldsymbol{x})$及其普适开折的动力学性态取决于两个因素: 一个是$g(\boldsymbol{x})$的线性结构, 即矩阵$Dg(\mathbf{0})$的特征值和特征向量的情况; 另一个是$g(\boldsymbol{x})$的非线性结构, 即$g(\boldsymbol{x})$的展开式中非线性项的情况. 这里我们按向量场的线性结构进行分类, 在此基础上再进一步考虑向量场非线性结构中的退化性对动力学性态的影响. 设$Dg(\mathbf{0})$有k个特征值的实部为零, 它们在$Dg(\mathbf{0})$的实约当标准形中对应一个k阶子块J, 即经过坐标的线性变换后, 可取标准形

$$Dg(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix},$$

其中A是非零实部的特征值对应的子块. 记K为全体k阶实矩

阵组成的线性空间，S 为在 K 中与 J 相似的全体实矩阵组成的子流形．我们称 S 在空间 K 中的余维数为 $g(x)$ 的**线性余维数**．下面按线性余维数和子块 J 的结构，对向量场进行分类．例如

线性余维数为 1 的情形：

1．$Dg(0)$ 有单重零特征值，此时

$$J=(0).$$

2．$Dg(0)$ 有一对纯虚特征值 $\pm i\omega$，此时

$$J=\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}.$$

线性余维数为 2 的情形：

1．$Dg(0)$ 有二重零特征值，且 J 不可对角化（即 $Dg(0)$ 有二重非半简单的零特征值），此时

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2．$Dg(0)$ 有单重零特征值和一对纯虚特征值 $\pm i\omega\ (\omega>0)$，此时

$$J=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega\\ 0 & \omega & 0\end{pmatrix}.$$

3．$Dg(0)$ 有两对纯虚特征值 $\pm i\omega_1$ 和 $\pm i\omega_2\ (\omega_1,\ \omega_2>0)$，此时

$$J=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & 0 & 0\\ \omega_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \omega_2\\ 0 & 0 & \omega_2 & 0\end{pmatrix}.$$

其中，如果存在非负整数 n_1 和 n_2，使得 $\omega_1/\omega_2=n_1/n_2$，则称 J 是"$n_1:n_2$ 共振"的；否则，J 是"非共振"的．

此外，还有更高线性余维数的情形．例如当 $Dg(0)$ 有二重非半简单的纯虚特征值 $\pm i\omega$ 时，有

$$J=\begin{pmatrix}0 & -\omega & 1 & 0\\ \omega & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \omega\\ 0 & 0 & \omega & 0\end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{J}$ 是非半简单1:1共振的[68]~[70]，其线性余维数为3．又如当 $Dg(0)$ 有二重半简单的零特征值时，有

$$J=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

其线性余维数为4．

在把向量场按线性结构进行分类之后，我们便可以按非线性结构的退化情形进一步讨论其普适开折和分析各种可能的动力学状态．

§15 模态相互作用

应用中，往往把向量场的线性化矩阵的每个实特征值或每对复共轭特征值与该系统的一个模态对应．如果某模态对应的特征值实部为0，则称它是临界模态．我们把零特征值对应的临界模态称为定态的，并把纯虚特征值对应的临界模态称为周期态（或霍普夫型）的．显然，含参数系统的失稳和分岔现象，与临界模态的出现密切相关．这里考虑含参数系统在某个参数值处有多个临界模态且出现分岔的情形．在该参数值附近，临界模态之间的非线性相互作用可能引起更复杂的现象，例如次级分岔的出现．由于临界模态有两种基本形式，在双临界模态系统中就有三种模态相互作用：定态–定态相互作用、定态–周期态相互作用和周期态–周期态相互作用．假设我们已经用中心流形方法将系统约化，从而只需在 $n=2, 3, 4$ 维空间中对上述三种相互作用进行研究，这里着重讨论它们产生的次级分岔问题．考虑

$$\dot{\boldsymbol{x}}+g(\boldsymbol{x}, \mu)=\boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{15.1}$$

设 $g(\boldsymbol{0}, 0)=\boldsymbol{0}$，并记 $\boldsymbol{L}=D_x g(\boldsymbol{0}, 0)$．

1. 定态-定态相互作用

此时 $\boldsymbol{L}$ 有二重零特征值. 取空间维数 $n=2$, $\boldsymbol{L}$ 的标准形是 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 前者是通有的, 线性余维数为 2; 后者不是通有的, 线性余维数为 4. 我们可以利用 PB 范式和普适开折去研究各种可能的动力学性态(参看 §14 的例 11). 由于没有次级分岔出现, 在此不作详细讨论.[9]

2. 定态-周期态相互作用

此时 $\boldsymbol{L}$ 有特征值 0 和 $\pm\omega i(\omega\neq 0)$. 不失一般性, 可取 $\omega=1$, 不然就通过坐标变换而实现. 取空间维数 $n=3$, 记 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{L}$ 的标准形是

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

我们选取在(x_2, x_3)平面上有 $\boldsymbol{S}^1$ 对称性的 PB 范式[9]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}+p\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}0\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\ -x_3\\ x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}, \tag{15.2}$$

其中 p、q、r 都是 x_1、$x_2^2+x_3^2$、μ 的函数, 且满足

$$p(0, 0, 0)=p_{x_1}(0, 0, 0)=q(0, 0, 0)=0,$$
$$r(0, 0, 0)=1.$$

引进新的坐标

$$u=x_1, \qquad ve^{i\theta}=x_2+ix_3, \tag{15.3}$$

则(15.2)成为

$$\begin{cases}\dot{u}+p(u, v^2, \mu)=0,\\ \dot{v}+q(u, v^2, \mu)v=0,\\ \dot{\theta}+r(u, v^2, \mu)=0.\end{cases} \tag{15.4}$$

因为 $r(0, 0, 0)=1$, 所以在$(u, v, \mu)=(0, 0, 0)$附近, 由(15.4)的第三式见到 θ 是单调增加的, 从而(15.4)的动力学性态由前两

个方程确定. 记$f(u, v, \mu)=(p(u, v^2, \mu), q(u, v^2, \mu)v)^T$. 由于$p(0, 0, 0)=p_u(0, 0, 0)=q(0,0,0)=0$, 故$(u, v, \mu)=(0,0,0)$是$f$的一个奇异点. 此外, f关于反射变换$(u, v)\mapsto(u, -v)$是$\boldsymbol{Z}_2$等变的. 记$\boldsymbol{w}=(u, v)^T$, (15.4)的前两个方程写成

$$\dot{\boldsymbol{w}}+f(\boldsymbol{w}, \mu)=0, \tag{15.5}$$

系统(15.5)的平衡解由静态方程

$$f(\boldsymbol{w}, \mu)=0 \qquad \boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R} \tag{15.6}$$

给出, 这是在$\mathbb{R}^2$上有$\boldsymbol{Z}_2$对称性的静态分岔问题. 由坐标变换(15.3)显然可见, (15.6)的解对应原系统(15.2)的平衡解(若$v=0$)或周期解(若$v\neq0$). 也就是说, 原系统(15.2)的平衡解和周期解可以分别由下列方程确定:

1. 平衡解:

$$p(u, 0, \mu)=0, \qquad v=0. \tag{15.7}$$

2. 周期解:

$$p(u, v^2, \mu)=q(u, v^2, \mu)=0, \qquad v\neq0. \tag{15.8}$$

这些平衡解和周期解的稳定性, 亦由静态方程(15.6)的相应解的稳定性决定. 此外, (15.7)的解的迷向子群是$\boldsymbol{Z}_2$, (15.8)的解的迷向子群是1.

我们可以用等变奇异性理论去研究$\boldsymbol{Z}_2$对称分岔问题(15.6). 通过识别和普适开折, 便得到$f(\boldsymbol{w}, \mu)$的各种普适$\boldsymbol{Z}_2$开折, 从而得知原系统(15.2)的动力学性态. 由于篇幅所限, 这里只讨论$\boldsymbol{Z}_2$余维数等于1的情形, 更多的结果请参看[9].

对$\boldsymbol{Z}_2$对称分岔问题(15.6), $\boldsymbol{Z}_2$余维数为1的GS范式可取为

$$f(u, v, \mu)=(\varepsilon_1u^2+\varepsilon_2v^2+\varepsilon_3\mu,\ \varepsilon_4uv)^T. \tag{15.9}$$

其中$\varepsilon_i=\pm1(i=1, \cdots, 4)$. 它的一个普适$\boldsymbol{Z}_2$开折是

$$F(u, v, \mu, \alpha)=(\varepsilon_1u^2+\varepsilon_2v^2+\varepsilon_3\mu,\ \varepsilon_4(u-\alpha)v)^T.$$

进一步分析表明, 我们只要取$\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_3=-1$, 便足以研究系统的动力学行为. 考虑方程

$$F(u,\ v,\ \mu,\ \alpha)=(u^2+\varepsilon_2v^2-\mu,\ \varepsilon_4(u-\alpha)v)^T=0. \tag{15.10}$$

图 15-1 分别对 $\varepsilon_2=1$、$\varepsilon_4=\pm1$ 给出(15.10)的解在 $(u,\ v,\ \mu)=(0,\ 0,\ 0)$ 附近的静态分岔情况. 可以见到, 除了在 $\mu=0$ 处出现极限点分岔(在 $v=0$ 平面内)外, 在 $\mu=\alpha^2$ 处还出现 $v\neq0$ 的二级分岔解. 图上的正负号表示在相应的解支上线性化矩阵 $D_{(u,v)}F$ 的特征值实部的符号, 它们反映该解支的稳定性. 回到原系统(15.2), 由前所述, 可知本情形的定态-周期态相互作用表现为平衡解的极限点分岔(初级分岔)和通有霍普夫分岔(二级分岔)的相互作用.

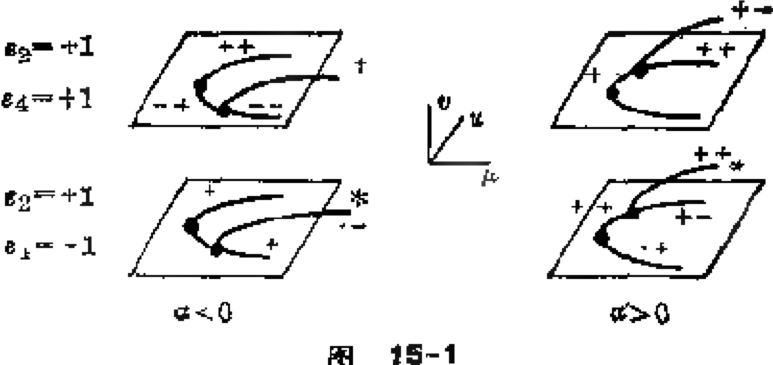


图 15-1

令人感兴趣的是, 定态-周期态相互作用在一定条件下会产生在二维环面上的准周期运动(T^2 解), 即出现二维环面分岔. 图 15-1 上的星号表示该解支上可能出现此类分岔. 这里举例说明之. 考虑(15.9)的另一个普适 Z_2 开折(其中取 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=\varepsilon_4=-1$)

$$H(u,\ v,\ \mu,\ \alpha)=(u^2+v^2-\mu,\ -(u+v^2-\alpha)v)^T \tag{15.11}$$

给出的系统

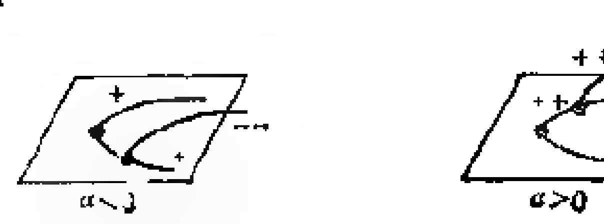


图 15-2

$$\dot{w}+H(w, \mu, \alpha)=0, \qquad w=(u, v)^T\in\mathbb{R}^2 \quad (15.12)$$

(15.12)在$\mu=0$处出现平衡解的极限点分岔和在$\mu=\alpha^2$处出现平衡解的二级分岔(见图15-2)，它们分别对应着原系统(15.2)的极限点分岔和通有霍普夫分岔．值得注意的是，当$\alpha>0$时，二级分岔解在$\mu=\alpha(2+\alpha)/4$处还会出现霍普夫分岔，即在该处产生系统(15.12)的一个周期解(在图15-2上用圆圈串表示)．由坐标变换(15.3)知道，这个二级分岔解对应原系统(15.2)的一个二维不变环面，从而出现二维环面分岔．

上面只介绍根据(15.6)的Z_2余维数为1的分岔结果所反映的原系统(15.2)的分岔行为，应当指出，(15.6)的更高Z_2余维数的分岔结果还会带来更复杂的动力学行为．总的来说，我们可按定态-周期态相互作用中出现的(通有或退化的)静态分岔和霍普夫分岔的类型进行分类．

3．周期态-周期态相互作用

此时L有两对纯虚特征值$\pm\omega_1 i$和$\pm\omega_2 i$(其中ω_1、$\omega_2>0$)．取空间维数$n=4$．在非共振情形，L的标准形是

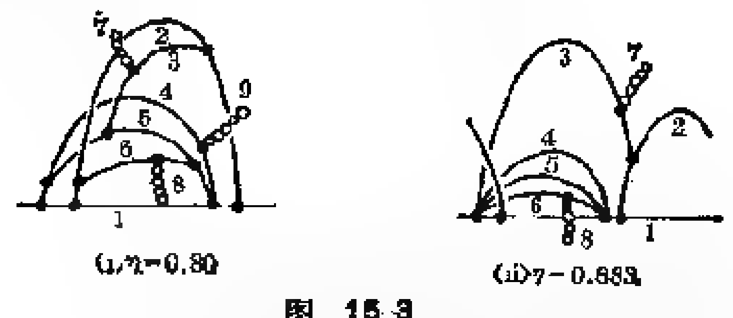
$$L=\begin{pmatrix}0 & \omega_1 & 0 & 0\\ \omega_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2\\ 0 & 0 & \omega_2 & 0\end{pmatrix}.$$

这时，在$\mathbb{R}^4$中的PB范式有T^2对称性，并可用极坐标变换化为在$\mathbb{R}^2$上有$Z_2\oplus Z_2$对称性的分岔问题．研究表明，这时不仅会有霍普夫分岔，而且还可能出现二维和三维环面分岔．

在共振情形，$\omega_1/\omega_2=n_1/n_2$($n_1$、$n_2$是非负整数)，其中$n_1+n_2>4$的情形称为弱共振，其动力学行为与非共振情形相似；$n_1+n_2\leqslant 4$的情形称为强共振，其动力学行为十分复杂．至于非半简单1:1共振，就可能同时出现定态-定态、定态-周期态和周期态-周期态等多种模态相互作用并会导致混沌运动．

我们还可进一步研究有对称性的系统的模态相互作用问题．

它可以用来解释在转动圆筒之间流动的一些复杂分岔现象(参看§3). 在该流动系统中，实验装置的轴对称性得知周向 $\boldsymbol{SO}(2)$(即水平面上二维旋转群)对称性；由圆筒无限长度、轴向周期性和对水平面的反射不变性假设得知轴向 $\boldsymbol{O}(2)$ 对称性. 因此流动系统有空间对称群 $\Gamma=\boldsymbol{O}(2)\times\boldsymbol{SO}(2)$，从而可用有对称性的分岔理论进行研究[93],[71],[72]. 根据在实验中观察到库塔流动可能变为泰勒涡流和螺旋涡流这一事实，它们分别对应静态分岔和霍普夫分岔，因此我们可以用有对称性的定态-周期态相互作用理论去研究库塔流动的一些分岔现象. 图 15-3 分别描述间隙比 $\eta=0.8$ 和 0.883 时的分岔情况. 基本流动是库塔流动，图 15.3(i) 上除了有泰勒涡流、螺旋涡流和飘带涡流这三种初级分岔之外，还有三种二级分岔(波状涡流、扭状涡流和调制螺旋涡流)以及多种三级分岔(它们一般都有两个或三个不可公约的频率成分)；图 15.3(ii) 上给出另一种状态，此时泰勒涡流改变分岔方向和稳定性，并可能存在更多的模态相互作用.



(i) $\eta=0.80$　　(ii) $\eta=0.883$

图 15-3

1. 库塔流动　2. 泰勒涡流　3. 波状涡流　4. 螺旋涡流
5. 飘带涡流　6. 扭状涡流　7. 调制波状涡流
8. 调制扭状涡流　9. 调制螺旋涡流

附录　微分动力系统基础

微分动力系统是研究分岔的重要数学基础．它起源于19世纪末对动力学问题中常微分方程的定性研究．本世纪60年代以来，微分动力系统的研究取得了重大进展．这里简要介绍微分动力系统的一些基本概念、基本性质，详细内容请参看有关的专著(例如[1]～[7]，[21]～[25])．

1．巴拿赫空间的微分运算和隐函数定理

在数学上，非线性问题通常可以通过定义在有限维或无限维空间上的非线性映射或方程来表示．巴拿赫空间是最重要的空间，因为它适合建立微分运算．常见的巴拿赫空间的例子包括n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$和希尔伯特(D. Hilbert)空间等．

设$\mathscr{E}$和$\mathscr{F}$是巴拿赫空间，U是E的一个开子集．取映射$f: U\to\mathscr{F}$．如果对$x_0\in U$有$\lim\limits_{\|\xi\|\to 0}\|f(x_0+\xi)-f(x_0)\|=0$，则称$f$在$x_0$处连续．如果$f$在任何$x\in U$处都连续，则称$f$是$U$上的连续映射．对于线性算子$\mathfrak{T}:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$，它是连续的充要条件是$\mathfrak{T}$是有界算子，即存在$M>0$，使得对任何$x\in\mathscr{E}$有$\|\mathfrak{T}x\|\leqslant M\|x\|$．$\mathscr{E}$到$\mathscr{F}$的全体线性有界算子的集合$\mathscr{L}(\mathscr{E},\mathscr{F})$是一个线性空间．若引进范数

$$\|\mathfrak{T}\|=\sup_{\|x\|=1}\|\mathfrak{T}x\|,\qquad \mathfrak{T}\in\mathscr{L}(\mathscr{E},\mathscr{F})\tag{A.1}$$

就可使$\mathscr{L}(\mathscr{E},\mathscr{F})$成为巴拿赫空间．

设映射$f:U\to\mathscr{F}$，其中$U\subset\mathscr{E}$是开集．如果对$x_0\in U$，存在线性有界算子$Df(x_0)\in\mathscr{L}(\mathscr{E},\mathscr{F})$，使得对$\|\xi\|$充分小的$\xi\in\mathscr{E}$，有

$$f(x_0+\xi)=f(x_0)+Df(x_0)\xi+o(\|\xi\|),\tag{A.2}$$

即

$$\lim_{\|\xi\|\to 0,\xi\neq 0}\frac{\|f(x_0+\xi)-f(x_0)-Df(x_0)\xi\|}{\|\xi\|}=0, \qquad (A.3)$$

则称 f"在 x_0 处可微"，并称 $Df(x_0)$（或记作 $f'(x_0)$）为 f 在 x_0 处的导算子（亦称弗雷许（R. M. Fréchet）导数）。如果 f 在任何 $x\in U$ 处都是可微的，则称 f"在 U 上可微"。如果 f 在 U 上可微，且 $Df:U\to\mathscr{L}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ 在 U 上连续，则称 f 是"U 上的 C^1 映射"。特别地，当 $\mathscr{E}=\mathbb{R}^m$、$\mathscr{F}=\mathbb{R}^n$ 时，映射 $f:U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是 m 元 n 维向量函数。记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$，$f(\boldsymbol{x})=(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m))$。若 f 在 $\boldsymbol{x}\in U$ 处可微，则 $Df(\boldsymbol{x})$ 可用雅可比矩阵表示：

$$Df(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{n\times m}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}. \qquad (A.4)$$

f 是 U 上的 C^1 映射的充要条件是 $\partial f_j/\partial x_i$ 在 U 上存在且连续（$i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$）。

我们还可定义高阶导算子（高阶导数）如下：如果 $D^{k-1}f$（$k>1$）在 $x_0\in U$ 处可微，则定义 k 阶导算子（k 阶导数）为 $D^kf(x_0)=D(D^{k-1}f)(x_0)$。如果 $D^{k-1}f$ 在 U 上可微，且 D^kf 在 U 上连续，则称 f 为 C^k 映射，即 f 在 U 上 C^k 可微。

U 上全体 C^k 映射（$k\geqslant 1$）的集合是一个线性空间，记作 $C^k(U,\mathscr{F})$。此外，U 上全体连续映射的集合也是一个线性空间，记作 $C^0(U,\mathscr{F})$。我们可以分别在它们上面引进范数：

$$\|f\|_{C^0}=\sup_{x\in U}\{\|f(x)\|\},$$

$$\|f\|_{C^k}=\max\{\|D^rf\|_{C^0}, r=0,1,\cdots,k\}, \qquad k\geqslant 1$$

$C^0(U,\mathscr{F})$（或 $C^k(U,\mathscr{F})$）中具有有限范数的全体映射构成巴拿赫空间。

设 f 是从开集 $U\subset\mathscr{E}$ 到开集 $V\subset\mathscr{F}$ 上的双方单值的连续映

射，其逆映射f^{-1}存在且连续，则称f是U到V上的一个同胚. 此外，如果f和f^{-1}都是C^k映射($k\geqslant 1$)，则称f是U到V上的一个C^k同胚.

隐函数定理 设$\mathscr{E}$、$\mathscr{F}$、$\mathscr{G}$是巴拿赫空间，$U\subset\mathscr{E}$和$V\subset\mathscr{F}$是开集，映射$f\in C^k(U\times V,\ \mathscr{G})$. 如果在$(x_0,\ y_0)\in U\times V$处有$f(x_0,\ y_0)=0$，且$f$关于$y$的导数$D_yf(x_0,\ y_0)\in\mathscr{L}(\mathscr{F},\mathscr{G})$是可逆的，则有开集$\widetilde{U}$、$\widetilde{V}$，满足$x_0\in\widetilde{U}\subset U$，$y_0\in\widetilde{V}\subset V$，并有唯一的映射$g:\widetilde{U}\to\widetilde{V}$，使得$y_0=g(x_0)$且对$x\in\widetilde{U}$有$f(x,\ g(x))=0$. g在$\widetilde{U}$上是C^k的，其导数为

$$Dg(x)=-(D_yf(x,\ g(x)))^{-1}D_xf(x,\ g(x)).$$

在这里，D_xf、D_yf分别表示对x和y取的导数(称偏导算子，或偏导数).

隐函数定理是非线性分析的一个重要定理.

2. 微分流形和可微映射

设集合M被一组开子集$\{U_\alpha\}$所覆盖，即$M=\bigcup_\alpha U_\alpha$. 如果每个子集$U_\alpha$都可通过一个同胚映射(即双方连续的可逆映射)$\varphi_\alpha$映为$\mathbb{R}^n$中的一个开子集$V_\alpha$，且对任何两个这样的子集$U_\alpha$和$U_\beta$，当交集$W=U_\alpha\cap U_\beta$非空时，$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是$\varphi_\alpha(W)$到$\varphi_\beta(W)$上的$C^r$映射($r\geqslant 1$)(见图A 1)，我们把这样的对$(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$称为$M$的一个图，它们的全体$\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}$称为$M$的一个$C^r$图册. 如果$M$的两个$C^r$图册的并仍是$C^r$图册，就称它们是$C^r$相容的. 易证这种相容关系是一种等价关系. 集$M$上$C^r$相容图册的等价类称为"$M$的一个微分结构". 如果集$M$有一个微分结构，就称为一个"$n$维$C^r$流形"($r\geqslant 1$). 形象地说，$n$维流形从整体上可以看成由$\mathbb{R}^n$的开集"粘接"而成的. 特别地，$\mathbb{R}^n$中的开子集$U$是一个$C^\infty$流形，其图册可取$\{(U,\ I)\}$，$I$是恒等映射. 此外，$n$维球面

$$S^n=\left\{x\ \middle|\ x\in\mathbb{R}^{n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\right\}$$

和n维环面$T^n=S^1\times\cdots\times S^1$都是$n$维微分流形的重要例子.

设 S 为 n 维微分流形 M 的子集. 如果对每个 $x\in S$, 有 M 在该处的图 (U, φ), 使得 $\varphi(S\cap U)$ 为 $\mathbb{R}^k(k<n)$ 中的开集, 则称 S 为 M 的一个 $\boldsymbol{k}$ 维子流形. S 在 M 中的余维数等于 $n-k$.

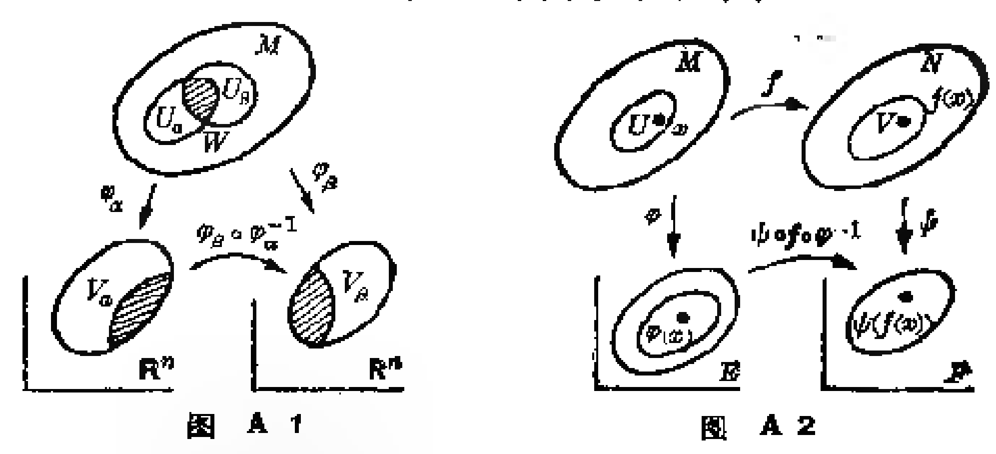


图 A 1　　　　图 A 2

如果将前面 n 维流形定义中的 $\mathbb{R}^n$ 换为巴拿赫空间 $\mathscr{E}$, 并相应地定义集合 $M=\bigcup_\alpha U_\alpha$ 的 C^r 相容图册 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$, 其中 $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathscr{E}$, 就可以建立"$C^r$ 巴拿赫流形"的概念, 其维数 $\dim M=\dim\mathscr{E}$. 巴拿赫流形不只包括有限维流形, 而且可以包括无限维流形. 为方便起见, 我们仍将 C^r 巴拿赫流形简称为 C^r 流形.

设 M、N 为 C^r 流形, 映射 $f:M\to N$. 对于任何 $x\in M$, 取在 x 处和 $f(x)\in N$ 处的图 (U, φ) 和 (V, ψ). 如果复合映射 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(x)\in\mathscr{E}$ 的某个邻域内是 $C^k(r\geqslant k)$ 可微的(见图 A-2), 则称 f 是"M 上的 C^k 映射". 我们把从流形 M 到 N 的全体 C^k 映射的集合记作 $C^k(M, N)$. 对 $f\in C^k(M, N)$, 令 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 分别为流形 M 和 N 的图册且有 $f(U_\alpha)\subset V_\alpha$, 对任意 $\varepsilon>0$, 定义 f 的 ε-邻域如下.

$$B_\varepsilon(f)=\{g\,|\,g\in C^k(M, N);\ g(\bar{U}_\alpha)\subset V_\alpha\ \forall\alpha;\ \text{且}\ \sup_\alpha\|\psi_\alpha\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1}-\psi_\alpha\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}\|_{C^k(\varphi_\alpha(U_\alpha))}<\varepsilon\}\tag{A.5}$$

于是, 所有这些 ε-邻域组成的集合 $\{B_\varepsilon(f)\,|\,f\in C^k(M,N)\}$ 是 $C^k(M, N)$ 的一个拓扑基, 从而使 $C^k(M, N)$ 成为拓扑空间. 特别地, 从流形 M 到自身的全体 C^k 映射的集合记作 $C^k(M)$.

设流形 M 和 N 是同胚的，$f: M \to N$ 是同胚映射，且 f 和 f^{-1} 都是 C^k 可微的，则称 M、N 是 C^k 同胚的，并称 f 为"从 M 到 N 的 C^k 同胚"。所有 C^k 同胚的集合记作 $\mathrm{Diff}^k(M, N)$，它是 $C^k(M, N)$ 的子集。特别地，从流形 M 到自身的 C^k 同胚的集合记作 $\mathrm{Diff}^k(M)$。

最后指出，设 $\gamma: (a, b) \subset \mathbb{R} \to M$ 是 C^k 映射，则称 γ 是"M 上的 C^k 曲线"。

3. 微分动力系统

动力系统理论所研究的是随时间演化的系统的全局(大范围)定性行为(例如平衡态、周期运动、回归运动、长时间的渐近运动等)。按照时间以连续或离散方式变化，可将动力系统分为两大类：连续动力系统(或连续流)和离散动力系统(或离散流)。前者通常简称动力系统(或流)。

考虑在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的自治常微分方程组

$$\dot{x} = dx/dt = f(x), \qquad x \in U, \ t \in \mathbb{R} \tag{A.6}$$

其中 $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 $C^k (k \geqslant 1)$ 映射。对任何 $x_0 \in U$，根据解的存在唯一性定理，此方程组有唯一的满足 $x|_{t=0} = x_0$ 的 C^k 解 $x = \varphi(t, x_0)$，这个解亦称为过点 x_0 的轨线。假定每个解的存在区间都是 $(-\infty, +\infty)$。记 $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$，于是，对 $t \in \mathbb{R}$ 可得 C^k 映射 $\varphi_t: U \to U$。集合 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 有以下的性质：

(i) $\varphi_0(x) = x, \ \forall x \in U$;

(ii) $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x), \ \forall s、t \in \mathbb{R}, \ x \in U$。

易见 φ_t 是 U 到自身的同胚，其逆为 $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$。于是 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 是 U 上的单参数变换群。把上述结果推广到微分流形，便得到流形上的动力系统的定义。

设 M 是一个微分流形，$\varphi_t: M \to M (t \in \mathbb{R})$ 是从 M 到自身的 $C^k (k \geqslant 1)$ 同胚。如果集合 $\{\varphi_t\}|_{t \in \mathbb{R}}$ 满足：(群性质)

(i) $\varphi_0 = I$;

(ii) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}, \ \forall s、t \in \mathbb{R}$,

则称它是"M 上的 C^k 连续动力系统"(或"C^k 流").

类似地，对于任何从 M 到自身的 $C^k(k\geqslant 1)$ 同胚 f，即 $f\in \mathrm{Diff}^k(M)$，双边序列 $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 显然满足：

(i) $f^0=I$;

(ii) $f^n\circ f^m=f^{n+m}$, $\forall n, m\in\mathbb{Z}$,

我们称该序列为"M 上的 C^k **离散动力系统**"(或 C^k **离散流**).

在一些发展型偏微分方程或映射问题中，还会遇到半动力系统. 为此，只需将前面的定义中的微分同胚推广到可微映射. 如果对 $t\geqslant 0$, C^k 映射 $\varphi_t: M\to M$ 满足 $\varphi_0=I$ 和 $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$, $\forall s, t\geqslant 0$(半群性质)，则称 $\{\varphi_t\}_{t\geqslant 0}$ 为 M 上的 C^k **半动力系统**(或 C^k **半流**). 此外，由 C^k 映射 $f: M\to M$ 可生成 C^k **离散半动力系统**(或 C^k **离散半流**) $\{f^n\}_{n\geqslant 0}$.

设 G 是作用在流形 M 上的变换群. 如果对映射 $f: M\to M$，有

$$f(gx)=gf(x), \qquad \forall g\in G,\ x\in M$$

则称 f 为 G **等变映射**. 如果在上述动力系统(或半动力系统)中的微分同胚(或可微映射)是 G 等变的，则称该系统有**对称群** G. 动力系统的对称群的存在对该系统的性态有重要影响.

4 向量场

设 $\gamma_1, \gamma_2: (-\delta, \delta)\to M(\delta>0)$ 是流形 M 上过 x_0 的两可微曲线，$\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=x_0$. 如果对 x_0 处的任一图 (U, φ)，有 $(\varphi\circ\gamma_1)'(0)=(\varphi\circ\gamma_2)'(0)$，则称曲线 γ_1 和 γ_2 **切等价**. M 上过 x_0 处的曲线的一个切等价类 $\xi(x_0)$ 称为 M 在 x_0 处的一个**切向量**. x_0 处所有切向量组成一个线性空间 $T_{x_0}M$(见图 A-3)，称为 M 在 x_0 处的**切空间**. M 上各点处的切空间的并集 $TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$ 称为"M 的**切丛**". 设

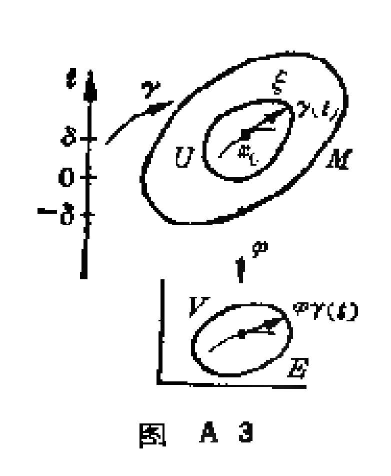


图 A-3

对每点 $x\in M$ 给定一个切向量 $\xi(x)\in T_xM$，如果映射 $\xi: M\to TM$

是 C^k 的，则称 ξ 为"M 上的 C^k 向量场"．M 上全体 C^k 向量场组成一个线性空间，记作 $\mathscr{X}^k(M)$．可以适当地取范数，使 $\mathscr{X}^k(M)$ 成为巴拿赫空间．特别地，若取 M 为开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，则 $TM=\mathbb{R}^n$，故 C^k 映射 $f:U\to\mathbb{R}^n$ 定义了 U 上的一个 C^k 向量场．

我们由前面已经知道，开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上的动力系统可由常微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x})$ 生成（这里 $\boldsymbol{x}\in U$），即由 U 上的向量场 f 生成．类似地，流形 M 上的动力系统在一定条件下可以由 M 上的向量场（或相应的发展型微分方程）生成．设 $f\in\mathscr{X}^k(M)(k\geqslant1)$，$\gamma:J=(-\varepsilon,\varepsilon)\to M(\varepsilon>0)$ 是 M 上过 x_0 的 C^k 曲线，$\gamma(0)=x_0$．如果对任何 $t\in J$，曲线 $x=\gamma(t)$ 的切向量（切等价类）满足 $\gamma'(t)=f(\gamma(t))$，则称 $\gamma(t)$ 为向量场 f 的过 x_0 的**积分曲线**，即 $\gamma(t)$ 是 f 给出的发展型微分方程

$$\dot{x}=f(x),\qquad x\in M \quad (\mathrm{A}.7)$$

满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的局部解．根据解的存在唯一性定理，若 f 是 C^k 向量场（$k\geqslant1$），则过任何 $x\in M$ 的 C^k 局部解存在且唯一．我们把它记作 $\varphi(t,x)=\varphi_t x$)．把 t 看作参数，C^k 映射 φ_t：$M\to M$ 有性质 $\varphi_0=I$ 和 $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$，$\forall s,t\in J$ 成立．这些 φ_t 的集称为**局部流**．如果过每点 $x\in M$ 的局部解 $\varphi_t(x)$ 的定义域都可以延拓到 $(-\infty,\infty)$，则向量场 f（即方程(A.7)）在 M 上有**整体解**，从而确定了 M 上的一个 C^k 流 $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$．

作为一种重要情形，若 f 为紧微分流形 M 上的 C^k 向量场（$k\geqslant1$），可以证明整体解存在，从而给出 M 上的一个 C^k 流．类似地，若 K 为流形 M 的紧子集，在其边界 ∂K 上，C^k 向量场指向 K 的内部，就可确定 K 上的 C^k 半流（见图 A-4）．

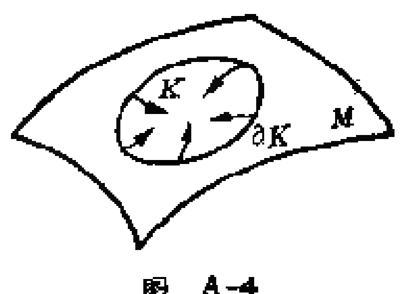


图 A-4

［例 1］ 线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \quad (\mathrm{A}.8)$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n\times n$ 常矩阵．此方程有初始条件 $\boldsymbol{x}|_{t=0}=\boldsymbol{x}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{x}=e^{At}\boldsymbol{x}_0=\varphi_t(\boldsymbol{x}_0).$$

于是 $\varphi_t=e^{At}$(其中 $t\in\mathbb{R}$)给出一个动力系统。

[例 2] 梯度系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=-\nabla V(\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in U\subset\mathbb{R}^n \quad (\text{A}.9)$$

其中 $V(\boldsymbol{x})$ 称为势函数。

[例 3] 哈密顿系统

设 $(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)\in U\subset\mathbb{R}^{2n}$, 哈密顿函数 $H:U\to\mathbb{R}$, $H=H(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$. 哈密顿系统由下面的哈密顿方程描述:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}.\qquad i=1,\cdots,n \quad (\text{A}.10)$$

[例 4] 非线性振动系统

单自由度自由振子模型为

$$\ddot{x}+g(x,\dot{x})=0,\qquad x\in\mathbb{R} \quad (\text{A}.11)$$

它等价于下面的常微分方程组(平面系统):

$$\dot{x}=y,\qquad \dot{y}=-g(x,y).\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (\text{A}.12)$$

[例 5] 反应-扩散系统

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, $t\geqslant0$, $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)^T\in\mathbb{R}^m$. 反应-扩散系统一般可由下面的反应-扩散方程组描述:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\nabla\cdot(\boldsymbol{D}_k\nabla u_k)+f_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u}),\qquad k=1,\cdots,m \quad (\text{A}.13)$$

其中 $\boldsymbol{D}_k$ 是扩散矩阵($k=1,\cdots,m$), 它们可以与 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{u}$ 等有关, f_k 是反应项($k=1,\cdots,m$). 该反应-扩散方程组在适当的巴拿赫空间中可以写成发展型方程. 根据抽象微分方程的算子半群理论, 其初值问题在一定条件下对 $t\geqslant0$ 存在唯一的整体解, 从而生成一个半动力系统.

5. 轨线、庞卡莱映射

设 $\{\varphi_t\}$ 是流形 M 上的动力系统. 对 $x\in M$, 可以定义过 x 的轨线 $\gamma(x)=\{\varphi_t(x)|t\in\mathbb{R}\}$, 并分别定义过 x 的正半轨 $\gamma_+(x)=$

$\{\varphi_t(x) \mid t\geqslant 0\}$ 和负半轨 $\gamma^-(x)=\{\varphi_t(x) \mid t\leqslant 0\}$.

如果 $p\in M$ 满足 $\varphi_t(p)=p$, $\forall t\in R$, 则称 p 为**平衡点**(或**不动点**). 若该动力系统由向量场 $f(x)$ 生成, 这时显然有 $f(p)=0$. 因此 p 也称为"**向量场 f 的零点**"(或**奇点**).

如果 $q\in M$ 对某个 $T>0$ 满足 $\varphi_T(q)=q$, 则称 q 为**周期点**. 这些 T 值中的最小值称为**周期**. 过 q 的轨线称为**周期轨线**(或**闭轨**).

如果 F 是流形 M 的子集, 对于任何 $x\in F$, 有 $\varphi_t(x)\in F$, $\forall t\in R$ 则称 F 为**不变集**. 显然, 动力系统的每条轨线, 特别是平衡点和周期轨线, 都是不变集. 下面介绍的极限集和非游荡集是更一般形式的不变集.

对 $x\in M$, 过 x 的轨线的 **ω 极限集**(或**正极限集**)和 **α 极限集**(或**负极限集**)分别为

$$\omega(x)=\{y\in M \mid \text{存在序列 } t_i\to+\infty \text{ 使 } \varphi_{t_i}(x)\to y\},$$
$$\alpha(x)=\{y\in M \mid \text{存在序列 } t_i\to-\infty \text{ 使 } \varphi_{t_i}(x)\to y\}.$$

对 $x\in M$, 如果对 x 的任何邻域 U 和任何 $T>0$, 存在 $t>T$, 使得 $U\cap\varphi_t(U)\neq\varnothing$, 则称 x 为**非游荡点**. 全体非游荡点的集合称为**非游荡集**, 记作 $\Omega(\varphi)$. 非游荡集是一个闭不变集, 它的补集 $M\setminus\Omega(\varphi)$ 称为**游荡集**.

容易见到, 平衡点和周期轨线都是它本身的 ω 和 α 极限集. 此外, ω 和 α 极限集都是非游荡集.



图 A.5

类似连续动力系统那样, 我们可对离散动力系统建立相应的概念. 设 g 是 M 上的一个同胚. 对 $x\in M$, "**过 x 的轨线**"是 $\{g^k(x) \mid k\in\mathbb{Z}\}$, 它是 M 中的一个点列. 满足 $g(p)=p$ 的点 p 称为**不动点**. 若存在正整数 m, 使得 $g^m(q)=q$, 则称 q 为**周期 m 点**. 显然, g 的周期 m 点是复合映射 g^m 的不动点.

连续与离散动力系统之间, 有着密切的关系. 例如给定 $t_0>$

0，每隔一定的时间 t_0 就对连续流 φ_t 作一次采样，便得到一个离散流 $\{g^n\}_{n\in Z}$，其中 $g=\varphi_{t_0}$，通常称为频闪映射．另一个重要例子是由庞卡莱映射生成的离散流．

设 Γ 是 C^k 流 φ_t 的一条周期轨线．任取 $q\in\Gamma$．过 q 取一个余维数为 1 的 C^k 子流形 $\Sigma\subset M$，使 Σ 与轨线 Γ 是横截的(即 Γ 在 q 处的切向量 $\xi(q)\notin T_q\Sigma$)．根据流的连续性，此时存在 q 的某邻域 $U\subset\Sigma$，使得对任何 $x\in U$ 有 $\tau(x)>0$，满足 $\varphi_{\tau(x)}(x)\in\Sigma$，且当 $0<t<\tau(x)$ 时 $\varphi_t(x)\notin\Sigma$(见图 A-5)．我们可以定义映射 P: $U\to\Sigma$ 如下：

$$P(x)=\varphi_{\tau(x)}(x),\qquad \forall x\in U\subset\Sigma \tag{A.14}$$

P 称为截面 Σ 上的**庞卡莱映射**(或**首次返回映射**、**后继映射**)．显然，映射 P 有不动点 q，且它是 C^k 映射．

6．拓扑等价和拓扑共轭

设 M 为微分流形，ξ、η 是 M 上的 C^k 向量场，它们分别生成 M 上的流 φ_t 和 ψ_t．如果存在一个同胚 $h:M\to M$，把流 φ_t 的轨线映为 ψ_t 的轨线，并保持时间定向，则称向量场 ξ 和 η(或对应的流 φ_t 和 ψ_t)是**拓扑等价的**．也就是说，对任何 $x\in M$，$0<t_1<\delta$，有 $0<t_2<\varepsilon$，使得

$$h\circ\varphi_{t_1}(x)=\psi_{t_2}\circ h(x). \tag{A.15}$$

此外，如果 h 保持时间不变，即 $t_1=t_2$，则称 ξ 和 η 是**拓扑共轭的**．类似地，考虑离散动力系统．对 M 上的 C^k 同胚 f、g，如果有同胚 $h:M\to M$，使得

$$h\circ f=g\circ h, \tag{A.16}$$

则称它们是**拓扑共轭的**．总之，在拓扑等价或拓扑共轭下，两个动力系统将保持相同的轨线拓扑结构．

在许多情形中，我们只关心流(或离散流)在平衡点(或不动点)附近的轨线性态．如果拓扑等价(或共轭)关系仅在对应的平衡点(或不动点)的邻域内成立，则称为**局部拓扑等价**(或**局部拓扑共轭**)．

7. 线性化、双曲性和稳定性

平衡点(或不动点)的研究是局部问题，因此可以只在该点的邻域内进行，无需涉及整个流形．取流形 M 在平衡点(或不动点) p 处的一个地图(U, φ)．不失一般性，同胚 φ 将 U 映为巴拿赫空间 $\mathscr{E}$ 中的点 $\varphi(p)=0$ 的邻域 V．于是我们可以在局部拓扑等价(或共轭)的意义下在原点 O 的邻域 $V\subset\mathscr{E}$ 中研究平衡点(或不动点)问题．

考虑连续系统

$$\dot{x}=f(x),\qquad x\in V\subset\mathscr{E}\tag{A.17}$$

其中 $f(x)$ 是 C^1 向量场，原点 O 是一个平衡点，即 $f(0)=0$．(A.17)在点 O 处的线性化系统为

$$\dot{x}=Df(0)x,\qquad x\in V\subset\mathscr{E}\tag{A.18}$$

其右端称为向量场 $f(x)$ 关于点 O 的**线性化向量场**．如果线性算子 $Df(0)$ 的谱(当 $\mathscr{E}=\mathbb{R}^n$ 时只含特征值)的实部不为 0，则称点 O 为**双曲平衡点**．其中，当 $Df(0)$ 的谱的实部都为负值(或正值)时，点 O 称为汇(或源)；否则称为**鞍点**．

定理 1(流的格鲁勃曼-哈特曼(Гробман P.Hartman)定理) 设 $\mathscr{E}$ 为巴拿赫空间，$f(x)$ 是 $V\subset\mathscr{E}$ 上的 C^1 向量场，点 O 是一个双曲平衡点，则向量场 $f(x)$ 与其线性化向量场在点 O 的某邻域内是局部拓扑等价的．

上述定理表明，在流的双曲平衡点附近轨线的拓扑结构，可用线性化流描述(见图 A.6)．

图 A.6

对离散系统，亦可作类似的讨论．设 g 是 V 上的微分同胚，点 O 是一个不动点，即 $g(0)=0$．g 在点 O 处的线性化同胚为 $Dg(0)$．如果 $Dg(0)$ 的谱的模不等于 1，则称点 O 为**双曲不动点**．其中，当 $Dg(0)$ 的谱的模都小于 1(或大于 1)时，点 O 称为汇(或源)；否则称为**鞍点**．对于离散流，

同样有下述定理：

定理 2（离散流的格鲁勃曼-哈特曼定理） 设 $\mathscr{E}$ 为巴拿赫空间，g 是 $V\subset\mathscr{E}$ 上的 C^1 同胚，点 O 是一个双曲不动点，则 g 和 $Dg(0)$ 对应的离散流在点 O 的某邻域内是局部拓扑共轭的.

设 x_0 是平衡点，对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对系统(A.17)的满足 $\|x(0)-x_0\|<\delta$ 的任何解 $x(t)$，有 $\|x(t)-x_0\|<\varepsilon$ $(\forall t>0)$，则称 x_0 为（在李雅普诺夫意义下）**稳定的**；否则，x_0 便是**不稳定的**. 如果平衡点 x_0 是稳定的，且在它的某邻域内的一切解当 $t\to+\infty$ 时都趋于 x_0，则称 x_0 是**渐近稳定的**. 对于流的平衡点的稳定性，有下述结果：

定理 3（线性稳定性定理） 设 x_0 是系统(A.17)的平衡点. 如果 $Df(x_0)$ 的谱的实部为负，则 x_0 是渐近稳定的. 如果 $Df(x_0)$ 有正的谱点，则 x_0 是不稳定的.

对于离散流的不动点，有类似的结论：

定理 4 设 x_0 是 C^1 同胚 g 的不动点. 如果 $Dg(x_0)$ 的谱的模小于1，则 x_0 是渐近稳定的. 如果 $Dg(x_0)$ 有模大于1的谱点，则 x_0 是不稳定的.

易知双曲平衡点（或不动点）或为渐近稳定的，或为不稳定的.

对于流（或离散流）的周期轨线的双曲性和稳定性，我们可以通过庞卡莱映射（或复合映射）化为相应的不动点问题去研究. 例如，对于流 φ_t 的周期轨线 Γ，过任一点 $q\in\Gamma$ 取截面 Σ 和庞卡莱映射 P，如果 P 在不动点 q 处的导算子 $DP(q)$ 的谱的模不等于1，则称 Γ 为双曲周期轨线.

8. 稳定流形和不稳定流形

先考虑连续系统(A.17)，点 O 是双曲平衡点. 记 $Df(0)$ 的谱 $\sigma=\sigma^s\cup\sigma^u$，其中 σ^s 和 σ^u 分别为谱中实部小于0和大于0的子集. 根据谱分解的理论，巴拿赫空间 $\mathscr{E}$ 可以分解为 $\mathscr{E}=\mathscr{E}^s\oplus\mathscr{E}^u$，其中 $\mathscr{E}^s$ 和 $\mathscr{E}^u$ 都是闭子空间，算子 $Df(0)$ 在 $\mathscr{E}^s$ 和 $\mathscr{E}^u$ 上的谱分别为

σ^s 和 σ^u. 由李雅普诺夫稳定性定理，线性化系统(A.18)在 $\mathscr{E}^s$(或 $\mathscr{E}^u$)上的流是收缩(或扩张)的，因此 $\mathscr{E}^s$ 和 $\mathscr{E}^u$ 分别称为线性化系统的**稳定子空间**和**不稳定子空间**. 对于系统(A.17)，我们在点 O 的邻域 V 中定义**局部稳定流形** $W^s_{loc}(0)$ 和**局部不稳定流形** $W^u_{loc}(0)$ 如下：

$$W^s_{loc}(0)=\{x\in V \mid 对\ t\geqslant 0\ 有\ \varphi_t(x)\in V_1(点\ O\ 的某邻域),\ 且当\ t\to+\infty\ 时\ \varphi_t(x)\to 0\},$$

$$W^u_{loc}(0)=\{x\in V \mid 对\ t\leqslant 0\ 有\ \varphi_t(x)\in V_2(点\ O\ 的某邻域),\ 且当\ t\to-\infty\ 时\ \varphi_t(x)\to 0\},$$

其中 φ_t 是系统(A.17)的流.

定理 5(流的稳定和不稳定流形的定理) 设点 O 是系统(A.17)的双曲平衡点，$f(x)$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$ 向量场，则存在 C^k 流形 $W^s_{loc}(0)$ 和 $W^u_{loc}(0)$，它们在点 O 处分别与 $\mathscr{E}^s$ 和 $\mathscr{E}^u$ 相切，且有相应的维数.（见图 A 7）

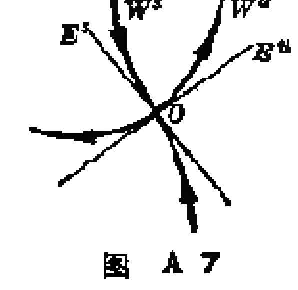


图 A 7

再考虑离散系统情形. 设 g 是 V 上的 C^k 同胚($k\geqslant 1$)，点 O 是一个双曲不动点. 记 σ^s 和 σ^u 为线性算子 $Dg(0)$ 的谱中模小于 1 和大于 1 的子集. 于是有 $\mathscr{E}=\mathscr{E}^s\oplus\mathscr{E}^u$，其中 $\mathscr{E}^s$ 和 $\mathscr{E}^u$ 分别为 $Dg(0)$ 的稳定子空间和不稳定子空间，$Dg(0)$ 在其上的谱分别是 σ^s 和 σ^u. 在 V 中定义 g 的局部稳定流形 $W^s_{loc}(0)$ 和局部不稳定流形 $W^u_{loc}(0)$ 如下：

$$W^s_{loc}(0)=\{x\in V \mid 对\ n\geqslant 0\ 有\ g^n(x)\in V_1(点\ O\ 的某邻域),\ 且当\ n\to+\infty\ 时\ g^n(x)\to 0\},$$

$$W^u_{loc}(0)=\{x\in V \mid 对\ n\geqslant 0\ 有\ g^{-n}(x)\in V_2(点\ O\ 的某邻域),\ 且当\ n\to+\infty\ 时\ g^{-n}(x)\to 0\}.$$

定理 6(离散流的稳定和不稳定流形定理) 设点 O 是 $C^k(k\geqslant 1)$ 同胚的双曲不动点，则存在 C^k 流形 $W^s_{loc}(0)$ 和 $W^u_{loc}(0)$，它们在点 O 处分别与 $\mathscr{E}^s$ 和 $\mathscr{E}^u$ 相切，且有相应的维数.

局部稳定和不稳定流形都可以延拓成全局稳定和不稳定流

形. 此外,对流(或离散流)的双曲周期轨线,亦可类似地建立稳定和不稳定流形概念.

9. 中心流形

在非双曲平衡点(或不动点)附近,轨线有较复杂的结构. 这里只讨论空间 $\mathscr{E}=\mathbb{R}^n$ 的情形. 至于无限维巴拿赫空间的结果,可参看[7]、[53].

先考虑连续系统(A.17). 设点 O 是非双曲平衡点, $Df(0)$ 的谱 $\sigma=\sigma^s\cup\sigma^u\cup\sigma^c$, 其中 σ^s 和 σ^u 的意义如前, σ^c 是谱中实部为0的子集,并取空间 $\mathscr{E}$ 的谱分解 $\mathscr{E}=\mathscr{E}^s\oplus\mathscr{E}^u\oplus\mathscr{E}^c$, 使得 $Df(0)$ 在 $\mathscr{E}^s$、$\mathscr{E}^u$ 和 $\mathscr{E}^c$ 上的谱分别为 σ^s, σ^u 和 σ^c. $\mathscr{E}^s$、$\mathscr{E}^u$ 和 $\mathscr{E}^c$ 是线性化系统的稳定子空间、不稳定子空间和中心子空间.

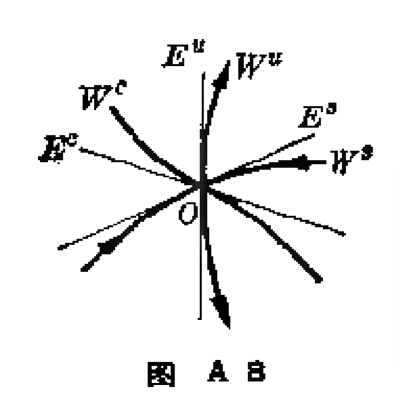


图 A 8

定理 7(流的中心流形定理) 设点 O 是系统(A.17)的非双曲平衡点, $f(x)$ 是 C^k 向量场 $(1\leqslant k<\infty)$, 则在点 O 的某邻域内,存在过点 O 且在该处分别与 $\mathscr{E}^s$、$\mathscr{E}^u$ 和 $\mathscr{E}^c$ 相切的 C^k 局部稳定流形 $W^s_{loc}(0)$、C^k 局部不稳定流形 $W^u_{loc}(0)$ 和 C^{k-1} 局部中心流形 $W^c_{loc}(0)$(见图 A 8). 它们都是局部不变集(即过流形上每一点的轨线在充分小的时间内仍在此流形上). 此外, $W^s_{loc}(0)$ 和 $W^u_{loc}(0)$ 是局部唯一的, 但是 $W^c_{loc}(0)$ 一般不是局部唯一的.

在非双曲平衡点附近, 流在与中心流形"横截"的方向上的局部性态是比较简单的, 因为它们主要由局部稳定和不稳定流形上的收缩流和扩张流决定. 但是, 在局部中心流形上的流可能是收缩或扩张的,而且一般与线性化流在中心子空间上的性态不同,因此深入分析中心流形上的流的性态是十分重要的.

[例] 考虑系统

$$\dot{x}=x^2, \qquad \dot{y}=-y. \qquad (x, y)\in\mathbb{R}^2 \quad \text{(A.19)}$$

它的满足初始条件 $(x, y)|_{t=0}=(x_0, y_0)$ 的轨线由

$$x(t)=\frac{x_0}{1-tx_0},\qquad y(t)=y_0e^{-t}$$

给出．消去 t 之后，有

$$y=(y_0e^{-1/x_0})e^{1/x}.$$

由此可见，在左半平面 $x<0$ 上的所有轨线当 $x\to 0$ 时都趋于原点，且各阶导数都趋于 0．在右半平面 $x>0$ 上，只有一条轨线（即正半 x 轴）当 $x\to 0$ 时趋于原点（见图 A-9）．

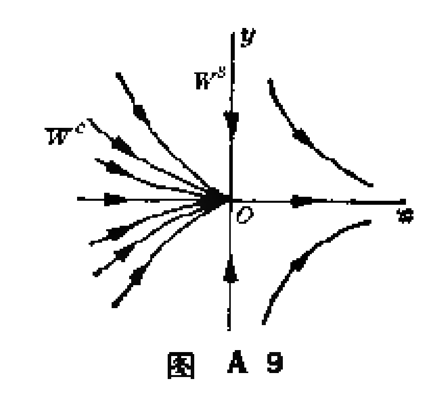


图 A 9

系统（A.19）在原点处的线性化系统的中心子空间 $\mathscr{E}^c$ 就是 x 轴．由于中心流形在原点处与 $\mathscr{E}^c$ 相切，因此系统（A.19）在左半平面的任一轨线与正半 x 轴一起，都是一个 C^∞ 中心流形．由此可见，系统（A.19）有无穷多个 C^∞ 中心流形．

对于离散流的非双曲不动点，也有类似的中心流形定理，这里从略．

10．结构稳定性和通有性

"结构稳定性"是指当动力系统受到小扰动后拓扑结构保持不变的性质．设 f 是微分流形 M 上的 C^k 向量场，即 $f\in\mathscr{X}^k(M)$．如果存在 $\varepsilon>0$，使得在 f 的某邻域 $B_\varepsilon(f)$（参看（A.5）式）中的任何 C^k 向量场 g 都与 f 拓扑等价，则称向量场 f 是 **C^k 结构稳定的**；否则，称为 **C^k 结构不稳定的**．通常只考虑 C^1 结构稳定性（简称为结构稳定性）．我们还可类似地给出微分同胚的结构稳定性定义．

在许多情形中，我们只关心系统的平衡点（不动点）附近的局部拓扑结构，这时要用局部结构稳定性的概念．例如，设 x_0 为向量场 f 的平衡点，即 $f(x_0)=0$．如果对 f 的某邻域 $B_\varepsilon(f)$ 中的任何向量场 g 的平衡点 y_0（即 $g(y_0)=0$），在 x_0 和 y_0 的对应邻域内，f 和 g 是局部拓扑等价的，则称 f 在 x_0 附近是**局部结构稳定**

的.

[例 1] 单自由度振子系统

$$\ddot{x}+\mu\dot{x}+\omega^2x=0, \quad x\in\mathbb{R} \quad (A.20)$$

它可以写成下面的平面系统:

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-\omega^2x-\mu y, \quad (x, y)\in\mathbb{R}^2 \quad (A.21)$$

当 $\mu>0$(或 <0)时,原点是该系统的稳定(或不稳定)焦点;当 $\mu=0$ 时,原点是该系统的中心(见图 A-10). 显然, $\mu=0$ 对应的系统是结构不稳定的, 因为它与 $\mu\neq0$ 对应的系统的拓扑结构不是等价的.

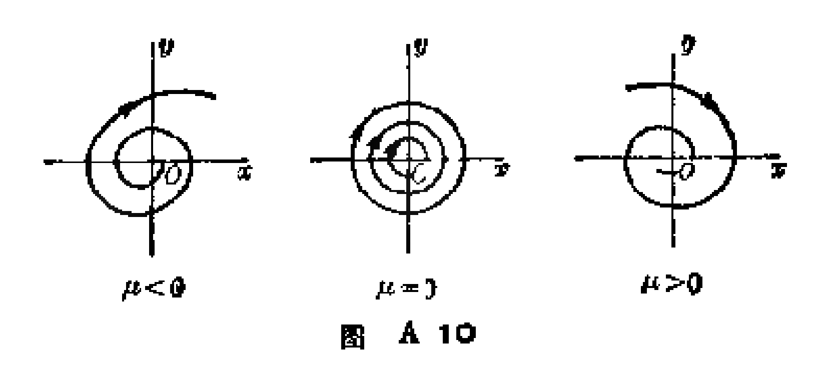


图 A 10

[例 2] 如果平面系统

$$\dot{x}=f(x) \quad x\in\mathbb{R}^2 \quad (A.22)$$

有连结鞍点的同宿或异宿轨线, 则此系统是结构不稳定的. 设系统有连结鞍点 p_1 和 p_2 的异宿轨线 γ(见图 A-11(i)). 这时适当的小扰动就可以把鞍点连线撕开, 使异宿轨线消失(见图 A-11(ii)). 显然未受扰系统与受扰系统不是拓扑等价的.



图 A 11

对于二维紧流形上的向量场, 有下面的结果:

定理 8(皮索杜(M.M.Peixoto)定理) 设 K 是二维可定向的

紧流形，$f\in\mathscr{X}^1(K)$，则 f 为结构稳定的充要条件是：

(1) 该系统有有限个平衡点和闭轨，且都是双曲的；

(2 不存在鞍点之间的连线；

(3) 非游荡集仅由平衡点和闭轨组成.

此外，$\mathscr{X}^1(K)$中所有结构稳定的向量场组成一个稠密的开子集.

作为一个特殊情形，设 $G\subset\mathbb{R}^2$ 为平面紧集，$f\in\mathscr{X}^1(G)$为结构稳定的充要条件只需上面的条件(1)和(2). 这是因为平面向量场的非游荡集只由平衡点、闭轨和同(异)宿轨线组成，故上面的条件(2)和(3)是等价的.

在$\mathscr{X}^k(M)$(或 $\mathrm{Diff}^k(M)$)中，满足某种性质 P 的向量场(或微分同胚)组成的集合是$\mathscr{X}^k(M)$(或 $\mathrm{Diff}^k(M)$)中可数个稠密开集的交，则称性质 P 是通有的(generic)，否则，性质 P 是退化的(degenerate). 概括地说，如果性质 P 在某个动力系统集合中是通有的，则表示该性质在此动力系统集合中是"一般"和"普遍成立"的. 定理 8 的结果指出，结构稳定性在二维可定向的紧流形上的 C^1 向量场集合中是通有的，而结构不稳定性是退化的. 这个结论对高维($n\geqslant 3$)情形不再成立.

对高维微分流形上的动力系统，结构稳定性的研究十分困难，至今尚未有完整的结果. 在讨论高维动力系统的结构稳定性时，经常用到"横截性"的概念. 若流形 M 的两个子流形 S_1 和 S_2 或者不相交，或者对任何 $p\in S_1\cap S_2$ 有

$$T_pM = T_pS_1+T_pS_2,$$

则称 S_1 和 S_2 是横截的. 一般地说，如果某动力系统有非双曲的平衡点(不动点)或周期轨线，或者某些稳定流形与不稳定流形非横截相交，则该系统是结构不稳定的.

11. 分岔

设 V 为微分流形 M 上的全体 C^1 向量场(或 C^1 同胚)组成的空间. 记 S 为 V 中结构稳定系统组成的集合. 由结构稳定性定义可知 S 是一个开集，于是 V 中结构不稳定系统的集合 $\Sigma=V\setminus S$

是一个闭集．对于集中Σ的系统，总存在任意小的扰动，使该系统的拓扑结构发生变化，即扰动系统与原来系统不拓扑等价（或不拓扑共轭），这种现象称为**分岔**，Σ称为动力系统空间中的**分岔集**．如果我们只研究在平衡点（或不动点）附近的局部向量场（或微分同胚）的结构稳定性，就可以类似地建立局部分岔的概念．

如果分岔集Σ的某子集Σ^*是空间V中的一个余维数为r的子流形，则Σ^*对应的分岔的余维数为r．分岔余维数可以作为动力系统的退化程度（即结构不稳定程度）的一种衡量．如果分岔余维数越大，则系统退化程度越大，受扰后可能出现的拓扑结构变化方式越多，从而分岔性态就越复杂．

12．普用分岔和普适开折

考虑含参数向量场的分岔问题（这里的概念对含参数映射的分岔问题也同样适用）．令$V=\mathscr{X}^1(M)$．取V中某个m参数向量场$f(x, \mu)$，$x\in M$，$\mu\in J\subset\mathbb{R}^m$是分岔参数．如果有$\mu_0\in J$，对$\mu_0$的某邻域$J_1\subset J$中的任何$\mu_1(\mu_1\neq\mu_0)$，向量场$f(x, \mu_1)$与$f(x, \mu_0)$不拓扑等价，则称含参数向量场$f(x, \mu)$在$\mu_0$处出现分岔，$\mu_0$称为分岔值．全体分岔值组成参数$\mu$空间中的分岔集$B$．根据参数$\mu$与向量场$f(\cdot, \mu)$的一一对应关系，由所有的$\mu\in J$给出的向量场$f(x, \mu)$构成空间$V$的一个子集$D_\mu$．$f$在参数空间中的分岔集$B$对应在动力系统空间$V$中的子集$\Sigma\cap D_\mu$（见图A 12）．

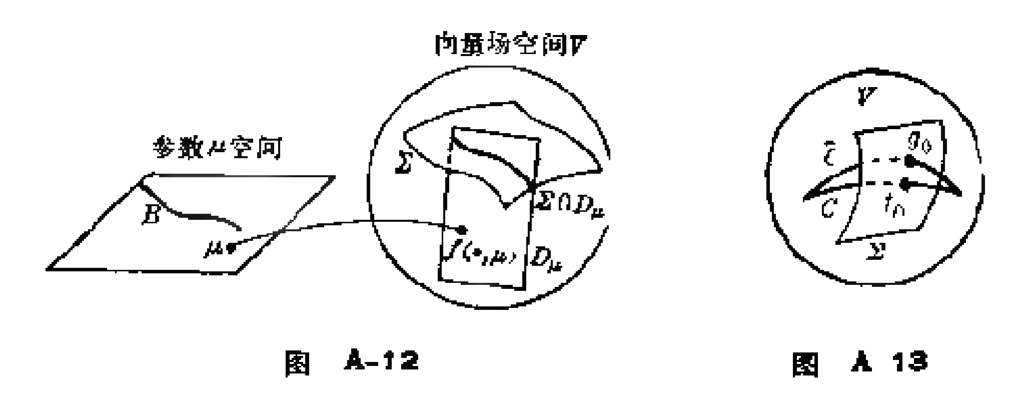


图 A-12　　　　图 A 13

接着讨论m参数向量场$f(x, \mu)$，$\mu\in J\subset\mathbb{R}^m$的分岔性态在

扰动作用下的保持性. 设 $\mu_0 \in J$ 是 f 的一个分岔值, 且其他 $\mu \in J$ 都不是分岔值. 如果存在 f 的一个邻域 $W \subset V$, 使得对任何 m 参数向量场 $g \in W$, 有一个在 $M \times J$ 上的连续映射 $h: (x, \mu) \mapsto (y(x, \mu), \nu(\mu))$, 它把向量场 $f(x, \mu)$ (其中 $\mu \in J$) 的轨线映为向量场 $g(y, \nu)$ 的轨线, 且保持时间定向, 则称 f 在 μ_0 处的分岔是通有(或非退化)的; 否则, 是退化的. 显然, 通有分岔的定性性态在 m 参数向量场集合中不受扰动而改变, 而退化分岔则相反

m 参数向量场 f 对应空间 V 中的一个 m 维子流形 D_μ. 如果 D_μ 与空间 V 中的分岔集 Σ 在 f_0 处横截相交, 则在 f_0 处出现的分岔是通有的. 例如在图 A-13 上, 单参数向量场 f 对应的曲线 c 与分岔集 Σ 横截相交于 f_0. 在受到扰动后, 曲线 c 变为相邻的曲线 $\tilde{c}$. 只要扰动足够小, 曲线 $\tilde{c}$ 亦与分岔集 Σ 横截相交. 这表明单参数向量场族在小扰动下分岔性态保持不变, 即向量场 f_0 的分岔是通有的. 在图 A-14 上, 单参数向量场对应的曲线 c 与分岔集 Σ 相切于 f_0(非横截相交), 这时足够小的扰动就可能使切点消失或变为多个交点, 可见小扰动就会改变此单参数向量场的分岔性态, 从而向量场 f_0 的分岔是退化的. 在图 A-15 上, 双参数向量场 p 对应的二维子流形 P 与 Σ 横截相交于 p_0, 则向量场 p_0 的分岔是通有的. 然而, 单参数向量场 f 对应的曲线 c(一维子流形) 与 Σ 在 f_0 处非横截相交, 故向量场 f_0 的分岔是退化的.

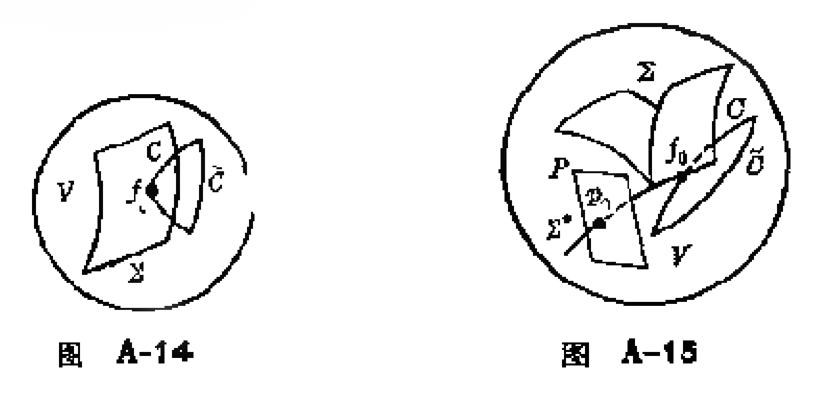


图 A-14　　　　图 A-15

如果某个含参数向量场 $f(x, \mu)(\mu \in \mathbb{R}^m)$ 的所有分岔都是通有的, 则该向量场是普用的, 否则是非普用的. 非普用的含参数向

量场有退化分岔。我们可以通过引进附加参数(即开折)的方法，把非普用向量场扩展为普用向量场.

对于m参数向量场$f(x, \mu)$ $(\mu\in\mathbb{R}^m)$，如果引进新的参数$\nu\in\mathbb{R}^k$和$(m+k)$参数向量场$F(x, \mu, \nu)$，使得$F(x, \mu, 0)=f(x, \mu)$，则称$F(x, \mu, \nu)$是$f(x, \mu)$的一个k**参数开折**，ν为**开折参数**. 如果$f(x, \mu)$的某个开折$F(x, \mu, \nu)$是普用的，则称F为f的一个**普用开折**. 普用开折在拓扑等价的意义下包含了对f的一切可能的扰动. f一般有无穷多个普用开折. 在f的一切普用开折中，含开折参数数目最少的称为**普适开折**. f的普适开折以最简单的方式包含了对f的所有扰动. 普适开折所含的开折参数的数目，称为f的**余维数**. 普适开折通常也不是唯一的.

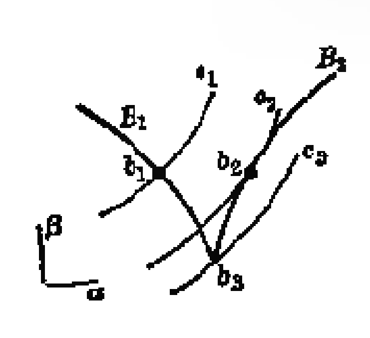


图 A-16

如果含参数向量场是普用的，我们就可以根据它在参数空间中的分岔集B去完整地了解它在动力系统空间V中的分岔性态. 例如图 A-16 给出某双参数的普用向量场$F(x, \alpha, \beta)$在参数(α, β)平面上的分岔集$B=B_1\cup B_2$. 于是光滑曲线部分对应着余维数为 1 的分岔，尖点b_3对应着余维数为 2 的分岔. 在参数平面上的每条曲线$\beta=\beta(\alpha)$给出相应的单参数向量场$f(x, \alpha)\equiv F(x, \alpha, \beta(\alpha))$. 由图 A-16 容易看到，曲线$c_1$对应的单参数向量场是普用的，而曲线$c_2$和$c_3$对应的单参数向量场不是普用的.

索　引

词条按汉语拼音顺序排列，由特殊符号开始的条目放在最后.

科学家中外译名对照表

Banach, S.	巴拿赫
Bénard, H.	贝纳特
Bernoulli, Daniel	伯努利
Birkhoff, G. D.	伯克霍夫
Boussinesq, J.	波辛尼斯克
Cahn, J. W.	凯恩
Conley, C.	康利
Couette, M. M.	库塔
Damköhler	达姆克勒
Dirichlet, P. G.	狄利克雷
Duffing, G.	杜芬
Euler, L.	欧拉
Fick, A. E.	菲克
FitzHugh, R.	菲兹·休
Fourier, J. B. J.	傅里叶
Fréchet, M.	弗雷许
Fredholm, T.	弗雷德霍姆
Golubitsky, M.	戈鲁比茨基
Haken, H.	哈肯
Hamilton, W. R.	哈密顿
Hartman, P.	哈特曼
Hesse, L. O.	海赛
Hilbert, D.	希尔伯特
Hilliard, J. E.	希里亚特
Hodgkin, A. L.	霍特金
Hopf, E.	霍普夫
Huxley, A. F.	赫克斯利
Jacobi, C. G. J.	雅可比
Lorenz, E. N.	洛伦兹
Malgrange, B.	马尔格朗奇
Magrangoni	马格兰哥尼
Mathieu, E. L.	马休
Morse, M.	莫尔斯
Nagumo, J. S.	纳古莫
Neumann, C. G.	诺伊曼
Noyes, R. M.	诺伊斯
Oberbeck	奥勃贝克
Peixoto, M. M.	皮索杜
Poincaré, H.	庞卡莱
Prandtl, L.	普朗特
Prigogine, I.	普里高津
Rayleigh, Lord	瑞利
Reynolds, O.	雷若
Rössler, O. E.	洛斯勒
Sacker, R. J.	沙克
Schaeffer, D. G.	沙弗
Schmidt, E.	施密特
Schwarz, G.	施瓦兹
Smale, S.	斯梅尔
Taylor, G. I.	泰勒
Thom, R.	托姆
Van der Pol, B.	范德波
Whitney, H.	惠特尼
Андронов А. А. (Andronov, A. A.)	安德罗诺夫

Арнольд, В.И	
(Arnold, V. I.)	阿尔诺特
Белоусов, Б. Б.	
(Belousov, B. B.)	贝洛索夫
Гробман, Д.	
(Grobman, D.)	格鲁勃曼
Ляпунов, А. М	
(Liapunov, A. M.)	李雅普诺夫
Мельников, В. К	
(Melnikov, V. K.)	梅尔尼科夫
Неймарк, Ю. И.	
(Neimark, J. I.)	内依马克
Шильников, Л. П.	
(Shilnikov, L. P.)	什尔尼科夫
Жаботинский, А. М.	
(Zabotinskii, A. M.)	查波丁斯基

参考文献

[1] J. Guckenheimer, and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.

[2] V. I Arnold, *Dynamical Systems V Theory of Bifurcation and Catastrophes*. Springer Verlag, 1989

[3] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1988 (2nd ed.)

[4] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.

[5] G. Iooss and D. D, Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1990(2nd ed.).

[6] G Iooss, *Bifurcation of Maps and Applications*, North Holland, 1979.

[7] D Ruelle, *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*, Academic Press, 1989.

[8] M. Golubitsky and D G., Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 1, Springer-Verlag, 1985.

[9] M Golubitsky, I Stewart and D. G, Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2, Springer-Verlag, 1988.

[10] A. Vanderbauwhede, *Local Bifurcation and Symmetry*, Pitman, 1982.

[11] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos——Analytical Methods*, Springer-Verlag, 1988.

[12] R. Abraham and J. E., Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, Cummings, 1978(2nd ed.)

[13] S. N. Chow and J. Hale, *Methods of Bifucation Theory*, Springer-Verlag, 1982.

[14] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff and Y. H Wan, *Theory and*

Applications of Hopf Bifurcation, Cambridge, 1981.

[15] Marsden, J. E. and Mc Cracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, 1976.

[16] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, 1981.

[17] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier, *Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane*, John Wiley, 1973.

[18] R. Temam, *Infinite Dimensional Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1988.

[19] M. Kubicek and M. Marek, *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*, Springer-Verlag, 1983.

[20] C. S. Hsu, *Cell-to-Cell Mapping: a Method of Global Analysis for Nonlinear System*, Springer-Verlag, 1987.

[21] 廖山涛,《微分动力系统的定性理论》,科学出版社,1992.

[22] 张锦炎、钱敏,《微分动力系统导引》,北京大学出版社,1991.

[23] 陆启韶,《常微分方程定性方法和分叉》,北京航空航天大学出版社,1989.

[24] 陈予恕、唐云、陆启韶、郑兆昌、徐健学、欧阳怡,《非线性动力学中的现代分析方法》,科学出版社,1992.

[25] 张锦炎,《常微分方程几何理论与分叉问题》,北京大学出版社,1981.

[26] V. I., Arnold, Bifurcations and singularities in mathematics and mechanics, *Proc. of the* 16*th ICTAM*, 1988(“数学和力学中的分叉和奇异性”(朱照宣译),《力学进展》,**19**(1989), 217~231).

[27] 程昌钧、朱正佑,《结构的屈曲与分叉》,兰州大学出版社,1991.

[28] 陈予恕,《非线性振动系统的分叉和混沌理论》,高等教育出版社,1993.

[29] C. Sparrow, *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, 1982.

[30] H. L. Swinney and J. P. Gollub (eds.), *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, Springer-Verlag, 1985 (2nd ed.)

[31] G. Nicolis and I., Prigogine, *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*, John Wiley & Sons, 1977.

[32] 李如生,《非平衡态热力学和耗散结构》,清华大学出版社,1986.
[33] J. I. Tyson, *The Belousov-Zhabotinskii Reaction*, Springer-Verlag, 1976.
[34] 张锁春,《现代振荡反应的数学理论和数值方法》,河南科学技术出版社,1991.
[35] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.* (London), **117**(1952), 500~544.
[36] R. Fitz Hugh, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophys. J.*, **1**(1961), 445~466.
[37] J. S. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE.*, **50**(1962), 2061~2070.
[38] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, **19**(1978), 25~52.
[39] M. J. Feigenbaum, The universal metric properties of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.*, **21**(1979), 669~706.
[40] 陈式刚,《映象与混沌》,国防工业出版社,1992.
[41] V. I. Arnold, *Catastrophe Theory* Springer-Verlag, 1986 (2nd ed.).
[42] A. Majthay, *Foundations of Catastrophe Theory*, Pitman, 1985.
[43] H. Haken, *Synergetics*, Springer-Verlag, 1983(3rd ed.).
[44] H. Haken, *Advanced Synergetics*, Springer-Verlag, 1983.
[45] D. Wang(王铎), An Introduction to the normal form theory of ordinary differential equations, *Adv. in Math.*, **19**(1990), 38~71.
[46] 郑伟谋、郝柏林,"实用符号动力学",《物理学进展》, **10**(1990), 316~373.
[47] Hao Bai-lin, *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific, 1989.
[48] 陈文嫄,《非线性泛函分析》,甘肃人民出版社,1982.
[49] 张恭庆,《临界点理论及其应用》,上海科学技术出版社,1986.
[50] E. Doedel and J. Kernévez, AUTO: Software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations, *Appl. Math. Rep.*, California Institute of Technology, 1986.

[51] T. S. Parker and L. O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 1989.
[52] 朱正佑、程昌钧,«分叉问题的数值计算方法», 兰州大学出版社, 1989,
[53] A. Vanderbau whede and G. Iooss, Center manifold theory in infinite dimensions, *Dynamics Reported*, Vol. 1, Springer-Verlag, 1990.
[54] M. Golubitsky and D. Schaeffer, A theory for imperfect bifurcation theory via singularity theory, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 32 (1979), 21～98.
[55] 唐云,"分叉理论方法及在化学反应器研究中的应用",«数学的实践与认识»,1992 年第 3 期, 71～81.
[56] 李如生, "扩散不稳定相中的化学稳定性和时-空有序结构的形成", «物理化学学报», **2**(1986), 437～443.
[57] 陆启韶, "有扩散不稳定性的四阶反应-扩散系统的空间周期结构", «物理学报», **38**(1989), 1901～1910.
[58] 屈乐伟、陆启韶,"Cahn-Hilliard-Schlögl 反应-扩散方程分叉问题", «北京航空航天大学学报», 1992 年第 2 期, 105～112.
[59] M. Golubitsky, J. W. Swift and E. Knobloch, Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Benárd convection, *Physica*, **10D** (1984), 249～276.
[60] J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1985.
[61] A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, 1981.
[62] Q. S. Lu and C. W. S. To, Principal resonance of a nonlinear system with two-frequency parametric and self-excitations, *Nonlinear Dynamics*, **2**(1991), 419～444.
[63] C. W. S. To, Lin Rui, Huang Kelei and Lu Qishao, Primary bifurcations in two non-linearly coupled oscillators, *J. of Sound and Vibration*, **147**(1991), 265～282.
[64] Lin Rui, C. W. S. To, Huang Kelei and Lu Qishao, Secondary bifurcations of two non-linearly coupled oscillators, *J. of Sound and Vibration*, **165**(1993), 225～250.
[65] Chen Yushu and W. F. Langford, The subharmonic bifurcation

solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamic buckling problems, *Acta Mech. Sinica*, **4**(1988), 350～362.

[66] V. I. Arnold, On matrices depending on parameters, *Russ. Math. Surveys*, **26**(1971), 29～43.

[67] R. I., Bogdanov, Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues, *Functional Anal. Appl.*, **9** (1975), 144～145.

[68] A. Vanderbauwhede, Hopf bifurcation at non-semisimple eigenvalues, *Contemp. Math.*, **56**(1986), 343～353.

[69] 陆启韶，"旋涡诱发振动中的次谐、超谐和主共振问题"，《非线性动力学学报》，**1**(1993)，15～25.

[70] Q. S. Lu, C. W. S. To and K. L. Huang, Subharmonic, superharmonic and quasiperiodic oscillations induced by vortices, *Dynamics and Stability of Systems*, **3**(1993), 31～40.

[71] M. Golubitsky and I. N. Stewart, Symmetry and stability in Taylor-Couette flow, *SIAM J. Math. Anal.*, **17**(1986), 249～288.

[72] W. F. Langford, R. Tagg, E. Kostelich, H. L. Swinney and M. Golubitsky, Primary instability and bicriticality in flow between counterrotating cylinders, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 776～785.